

# Chapitre 4

## Plus court chemin dans un polygone

On s'intéresse ici au calcul d'un plus court chemin entre deux points dans un environnement polygonal, c'est-à-dire dans le plan privé de l'intérieur d'une union finie de polygones. On note  $\mathcal{O}$  l'ensemble des polygones – ou obstacles – de l'union. On note également  $S(\mathcal{O})$  l'ensemble des sommets des polygones de  $\mathcal{O}$ . L'espace libre  $\mathcal{E}$  désigne le plan privé de l'intérieur de  $\cup\mathcal{O}$ . On considère donc que  $\mathcal{E}$  est un fermé du plan.

**Lemme 4.1** *Soit  $x, y$  deux points de l'espace libre, et soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$  un chemin rectifiable joignant  $x$  à  $y$ . Il existe un chemin polygonal  $p$  entre  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{E}$  dont les sommets, hormis  $x$  et  $y$ , sont dans  $S(\mathcal{O})$  et de longueur inférieure à celle de  $\gamma$ . Si de plus  $\gamma$  n'est pas une courbe polygonale ou si  $\gamma$  n'a pas ses sommets dans  $S(\mathcal{O}) \cup \{x, y\}$  alors on peut choisir  $p$  strictement plus court que  $\gamma$ .*

**Preuve :** On peut supposer que l'espace libre est réduit à un rectangle contenant  $x, y$  et  $\cup\mathcal{O}$ . Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation de l'espace libre. L'image réciproque par  $\gamma$  de tout triangle fermé  $t \in \mathcal{T}$  est un compact de  $[0, 1]$ . Soit  $u, v$  les bornes respectivement inférieure et supérieure de  $\gamma^{-1}(t)$ . Le chemin obtenu en remplaçant la restriction de  $\gamma$  à  $[u, v]$  par le segment  $[\gamma(u), \gamma(v)]$  n'est pas plus long que  $\gamma$ . Par récurrence sur le nombre de triangles de  $\mathcal{T}$ , on peut donc supposer que l'intersection de  $\gamma$  avec chaque triangle est un segment et donc que  $\gamma$  est polygonale (cf. figure 4.1). Si un sommet  $s$  de  $\gamma$  n'est pas dans  $S(\mathcal{O}) \cup \{x, y\}$  alors  $s$  est intérieur à  $\mathcal{E}$  ou à une arête de  $\mathcal{O}$ . On vérifie dans les deux cas que l'on peut court-circuiter  $s$  pour raccourcir  $\gamma$  strictement.  $\square$

**Corollaire 4.2** *Deux points quelconques  $x, y$  de l'espace libre sont reliés par au moins un chemin de longueur minimale dans  $\mathcal{E}$ . Un tel chemin est nécessairement simple et polygonal et ses sommets sont dans  $S(\mathcal{O}) \cup \{x, y\}$ .*

**Preuve :** Remarquons qu'un chemin qui s'auto-intersecte contient un chemin strictement plus court. Un plus court chemin est donc nécessairement simple. Il y a un nombre fini de chemins polygonaux simples dont les sommets sont dans  $S(\mathcal{O}) \cup \{x, y\}$ . Le lemme précédent indique que, parmi ceux-ci, ceux qui minimisent la longueur sont des plus courts chemins.  $\square$

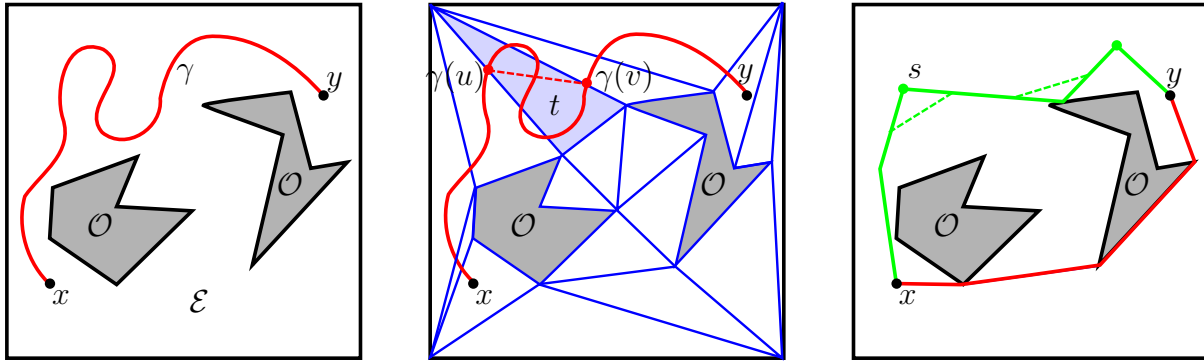


FIGURE 4.1 – (Gauche) Un chemin  $\gamma$  entre deux points  $x$  et  $y$  de l'espace libre  $\mathcal{E}$ . (Milieu) Triangulation  $\mathcal{T}$  de l'espace libre. On peut supposer que la restriction de  $\gamma$  à tout triangle  $t \in \mathcal{T}$  est un segment. (Droite) Un plus court chemin et un chemin polygonal non-optimal entre  $x$  et  $y$ .

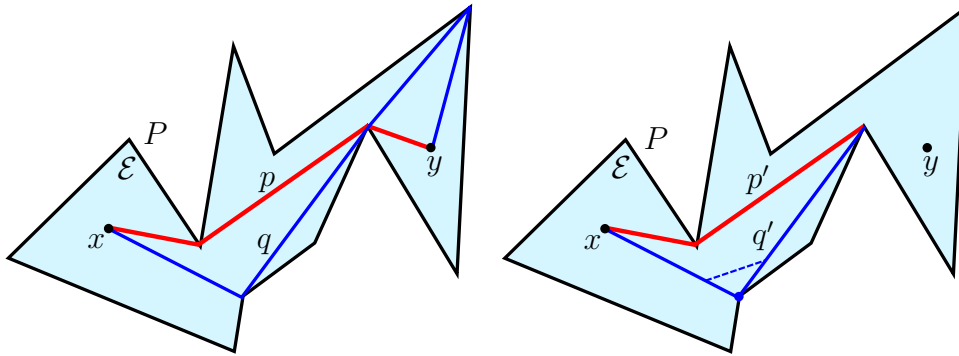


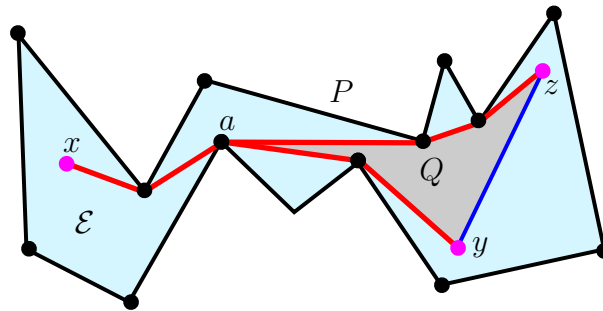
FIGURE 4.2 – (Gauche) Deux chemins polygonaux entre  $x$  et  $y$  dans l'espace libre  $\mathcal{E}$  intérieur à  $P$ . (Droite) L'un de ces chemins possède un sommet convexe qui peut être court-circuité et n'est donc pas optimal.

On se restreint désormais au cas où l'espace libre  $\mathcal{E}$  est délimité par une courbe polygonale fermée simple  $P$ . En particulier l'espace libre est homéomorphe à un disque fermé et le dual de toute triangulation (cf. chapitre 3) de l'espace libre est un arbre (exercice).

**Lemme 4.3** *Deux points quelconques  $x, y$  de  $\mathcal{E}$  sont reliés par un unique plus court chemin dans  $\mathcal{E}$ . Un tel chemin est caractérisé par le fait d'être polygonal et d'avoir des sommets internes qui sont des sommets de  $P$  et qui sont concaves (d'angles intérieurs au moins égaux à  $\pi$ ).*

**Preuve :** Remarquons qu'il existe au moins un plus court chemin par le corollaire 4.2. De plus, un plus court chemin est nécessairement simple, polygonal et ses sommets sont dans  $P$ .

Supposons par l'absurde que  $p$  et  $q$  sont deux plus courts chemins distincts entre  $x$  et  $y$  comme sur la figure 4.2. On peut donc trouver deux sous-chemins polygonaux  $p'$  et  $q'$  de  $p$  et  $q$  respectivement, ayant mêmes extrémités et disjoints par ailleurs. Leur union  $p' \cup q'$  est une courbe fermée simple et, par le théorème de Jordan, l'intérieur de cette courbe est

FIGURE 4.3 – La région  $Q$  a une forme d'entonnoir (*funnel* en anglais).

contenu dans  $\mathcal{E}$ . Mais d'après l'exercice 4.4 suivant,  $p' \cup q'$  a un sommet convexe distinct des extrémités communes de  $p'$  et  $q'$ , disons intérieur à  $q'$ . En court-circuitant ce sommet convexe dans  $\mathcal{E}$ , on obtient un chemin reliant les extrémités de  $q'$  et strictement plus court que  $q'$ , contredisant la minimalité de  $q$ .

Par ailleurs, supposons que  $p$  est un chemin polygonal de  $\mathcal{E}$  entre  $x$  et  $y$  dont les sommets internes sont des sommets de  $P$  d'angles intérieurs au moins égaux à  $\pi$ . Un tel chemin existe, puisqu'il existe au moins un plus court chemin dont les sommets internes sont dans  $P$  et que de tels sommets ne peuvent être convexes (sinon le chemin ne serait pas de longueur minimale). Si  $q$  est un chemin polygonal distinct de  $p$  entre  $x$  et  $y$ , on en déduit comme ci-dessus deux sous-chemins  $p' \subset p$  et  $q' \subset q$  tels que  $p' \cup q'$  est une courbe fermée simple, laquelle possède au moins trois sommets convexes. Par hypothèse,  $p'$  n'a pas de sommet intérieur convexe, donc  $q'$  possède un tel sommet. Il suit que  $q$  n'est pas un plus court chemin et donc que  $p$  est l'unique plus court chemin entre  $x$  et  $y$ .  $\square$

**Exercice 4.4** *Montrer que toute courbe polygonale simple fermée a au moins trois sommets convexes (d'angles intérieurs strictement inférieurs à  $\pi$ ).*

On note  $\pi(x, y)$  l'unique plus court chemin dans  $\mathcal{E}$  reliant  $x$  et  $y$ . On notera  $\pi_1 \cdot \pi_2$  la concaténation de deux chemins  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

**Lemme 4.5** *Soit  $x$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $[y, z]$  un segment dont l'intérieur est inclus dans l'intérieur de  $\mathcal{E}$  (cf. figure 4.3). Il existe un point  $a$  tel que  $\pi(x, y) = \pi(x, a) \cdot \pi(a, y)$  et  $\pi(x, z) = \pi(x, a) \cdot \pi(a, z)$ . De plus, si  $a \neq y, z$ , les deux chemins  $\pi(a, y), \pi(a, z)$  et le segment  $[y, z]$  forment une courbe simple et chacun des chemins  $\pi(a, y)$  et  $\pi(a, z)$  est concave : les angles intérieurs aux sommets intérieurs sont plus grands que  $\pi$  et situés d'un même côté du chemin.*

**Preuve :** Soit  $a$  le point de  $\pi(x, y) \cap \pi(x, z)$  le plus éloigné de  $x$ . D'après l'unicité des plus courts chemins, on peut écrire  $\pi(x, y) = \pi(x, a) \cdot \pi(a, y)$  et  $\pi(x, z) = \pi(x, a) \cdot \pi(a, z)$  où  $\pi(a, y)$  et  $\pi(a, z)$  sont disjoints en dehors de  $a$ . De plus, l'hypothèse  $\pi(y, z) = [y, z]$  impose que la courbe fermée  $\pi(a, y) \cdot [y, z] \cdot \pi(z, a)$  est simple et borde un polygone  $Q \subset \mathcal{E}$ . Les chemins  $\pi(a, y)$  et  $\pi(a, z)$  sont nécessairement concaves dans  $Q$ , sinon on pourrait les raccourcir dans  $Q$ .  $\square$

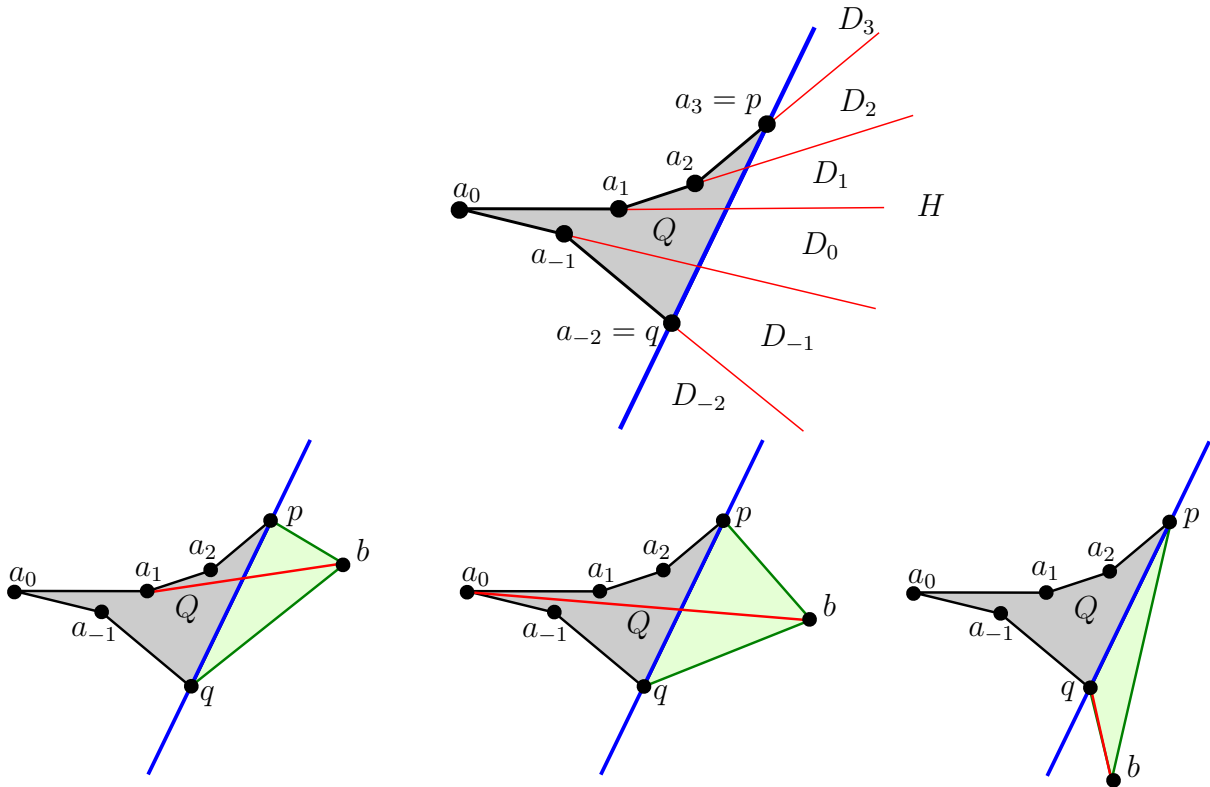


FIGURE 4.4 – (Dessus) Les droites supports des deux chaînes concaves de  $Q$  coupent le demi-plan opposé à  $Q$  et bordé par  $pq$  en secteurs disjoints. (Dessous) les trois configurations du lemme 4.6.

**Lemme 4.6** Soit  $Q$  un polygone en forme d'entonnoir bordé par un segment  $[p, q]$  et deux chaînes polygonales concaves  $(a_0, a_1, \dots, a_r = p)$  et  $(a_0, a_{-1}, \dots, a_{-s} = q)$ . On suppose que l'orientation est telle que  $Q$  est à droite de  $(a_{-s}, \dots, a_r)$  comme sur la figure 4.4. Soit  $b$  un point séparé de  $Q$  par la droite  $pq$ . Alors,

- ou bien le segment  $[a_0, b]$  est contenu dans  $Q \cup [p, q, b]$ ,
- ou bien il existe  $i \in [1, r]$  tel que la droite  $a_i b$  est tangente à  $(a_0, a_1, \dots, a_r)$ , c'est-à-dire que l'angle orienté  $\angle a_{i-1} a_i b$  est au moins  $\pi$ ,
- ou bien il existe  $i \in [-1, -s]$  tel que la droite  $a_i b$  est tangente à  $(a_0, a_{-1}, \dots, a_{-s})$ , c'est-à-dire que l'angle orienté  $\angle b a_i a_{i+1}$  est au moins  $\pi$ .

**Preuve :** On note  $H$  le demi plan bordé par  $pq$  et opposé à  $Q$ . Soit  $D_i$  le secteur diédral contenu dans  $Q \cup H$  et bordé par les droites  $a_{i-1} a_i$  et  $a_i a_{i+1}$  pour  $i \in [1 - s, r - 1]$ . On note également  $D_{-s}$  (resp.  $D_r$ ) le secteur bordé par  $pq$  et  $a_{1-s} q$  (resp.  $a_{r-1} p$ ) dans  $H$  et ne contenant pas  $p$  (resp.  $q$ ). La concavité des chaînes  $(a_0, a_1, \dots, a_r)$  et  $(a_0, a_{-1}, \dots, a_{-s})$  entraîne que les  $D_j$  sont disjoints et couvrent  $H$ . Si  $b \in D_i$  on est dans l'une des trois situations du lemme selon que  $i$  est positif, nul ou négatif.  $\square$

On suppose désormais que  $P$  est triangulé et on note  $\mathcal{T}$  une triangulation de  $P$ .

**Théorème 4.7** On peut calculer  $\pi(x, y)$  en temps  $O(n)$ , où  $n$  est le nombre de sommets de  $P$ .

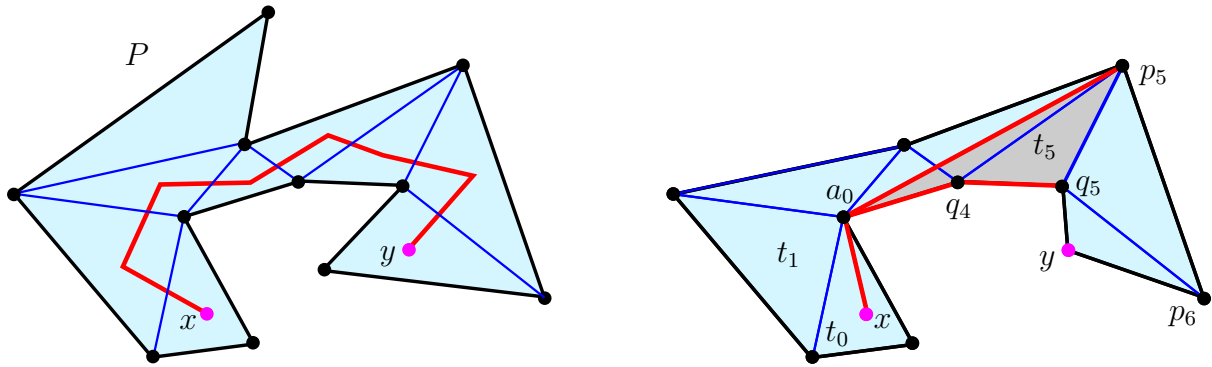


FIGURE 4.5 – (Gauche) Les points  $x$  et  $y$  peuvent être joints par une suite de triangles  $t_x = t_0, t_1, \dots, t_7 = t_y$ . (Droite) Les chemins  $\pi(x, p_5) = \pi(x, a_0).(a_0, p_5)$  et  $\pi(x, q_5) = \pi(x, a_0).(a_0, q_4, q_5)$  dans la bande de triangles  $\cup t_i$ .

**Preuve :** Soient  $t_x$  et  $t_y$  deux triangles de  $\mathcal{T}$  contenant respectivement  $x$  et  $y$ . Le graphe d'adjacence des triangles de  $\mathcal{T}$  étant un arbre, il existe un unique chemin reliant  $t_x$  à  $t_y$  dans cet arbre. Ce chemin correspond à une suite de triangles  $t_x = t_0, t_1, \dots, t_{k+1} = t_y$  telle que  $t_i$  et  $t_{i+1}$  partagent une arête (une diagonale de  $P$ )  $p_i q_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . En particulier, ou bien  $p_i = p_{i+1}$  ou bien  $q_i = q_{i+1}$ . Quitte à subdiviser  $t_y$ , on peut supposer que  $t_y = [p_k, q_k, y]$ . On a trivialement  $\pi(x, p_0) = [x, p_0]$  et  $\pi(x, q_0) = [x, q_0]$ . Supposons avoir calculé  $\pi(x, p_i)$  et  $\pi(x, q_i)$ . Par le lemme 4.5 appliqué à  $x$  et  $[p_i, q_i]$ , on a  $\pi(x, p_i) = \pi(x, a_0).(a_0, a_1, \dots, a_r = p_i)$  et  $\pi(x, q_i) = \pi(x, a_0).(a_0, a_{-1}, \dots, a_{-s} = q_i)$  pour certains sommets  $a_j$  de  $P$ ,  $j \in [-s, r]$ . On suppose également, sans perte de généralité, que  $q_i = q_{i+1}$  comme sur la figure 4.5. Par le lemme 4.6 et la caractérisation des plus courts chemins du lemme 4.3, on sait que  $\pi(x, p_{i+1})$  est de la forme  $\pi(x, a_j).[a_j, p_{i+1}]$ , pour un certain  $j \in [-s, r]$ . Pour trouver  $j$ , on part de  $j = r$  et, tant que  $j > 0$ , on teste si  $\angle a_{j-1} a_j p_{i+1}$  est plus grand que  $\pi$  (i.e. est concave en  $a_j$ ). Dans l'affirmative, on a  $\pi(x, p_{i+1}) = \pi(x, a_j).[a_j, p_{i+1}]$ . Sinon on décrémente  $j$  jusqu'à vérifier la condition de concavité. Si le test n'est toujours pas validé pour  $j = 1$ , on pose  $j = 0$  et on teste si  $p_{i+1}$  est à gauche de la droite orientée  $a_j a_{j-1}$  en décrémant  $j$  jusqu'à vérifier cette condition qui nous donne à nouveau  $\pi(x, p_{i+1}) = \pi(x, a_j).[a_j, p_{i+1}]$ .

En pratique, plutôt que de faire une (ou deux) boucle sur  $j$  on maintient trois listes  $\pi_c$ ,  $\pi_p$  et  $\pi_q$  représentant respectivement la partie commune à  $\pi(x, p_i)$  et  $\pi(x, q_i)$ , et les deux branches de l'entonnoir vers  $p_i$  et  $q_i$ . Au départ on a ainsi  $\pi_c = \pi(x, a)$ ,  $\pi_p = \pi(a, p_i)$  et  $\pi_q = \pi(a, q_i)$ . On commence par dépiler  $\pi_p$  "par le haut" à partir de  $p_i$ , puis le cas échéant, on dépile  $\pi_q$  "par le bas" à partir de  $a = a_0$ . Chaque sommet dépilé dans  $\pi_q$  est de plus empilé au sommet de  $\pi_c$  afin d'allonger la partie commune en conséquence. Chaque sommet dépilé ne pouvant être repilé dans  $\pi_p$  ni  $\pi_q$  par la suite (pourquoi?), l'algorithme nécessite au plus  $O(n)$  opérations.  $\square$

On appelle *algorithme de l'entonnoir* (funnel algorithm) la procédure décrite ci-dessus [LP84, GHL<sup>+</sup>87]. Elle peut être améliorée si l'on souhaite effectuer plusieurs requêtes de plus courts chemins pour obtenir un temps logarithmique par requête.

**Proposition 4.8** *Après un précalcul sur  $P$  en temps  $O(n)$ , on peut calculer pour tout*

*couple de points  $x, y$  de  $\mathcal{E}$ , la longueur de  $\pi(x, y)$  en temps  $O(\log n)$ . On peut également reporter  $\pi(x, y)$  en temps proportionnel à son nombre d'arêtes.*

Voir [GH89] et [Her91]. Principe : couper récursivement  $P$  en deux par une diagonale de la triangulation de  $P$  (supposée donnée). On peut associer à ce découpage récursif un arbre binaire  $T$  de profondeur  $O(\log n)$ . Chaque noeud de l'arbre correspond à un sous-polygone de  $P$  et une diagonale qui le coupe en deux. La profondeur  $\log n$  résulte de l'existence dans l'arbre dual de la triangulation d'une arête qui coupe en sous-arbres ayant au moins  $(n+1)/3$  sommets chacun (cf. lemme 3.8). Voir l'appendice de [GHL<sup>+</sup>87] pour l'obtention du découpage récursif en temps  $O(n)$ .

Chaque polygone associé à un noeud est bordé par des diagonales de coupe de profondeurs distinctes et donc par au plus  $O(\log n)$  d'entre elles. On enrichit  $T$  par des arcs issues du noeud associé à ce polygone et dirigés vers les noeuds associés aux diagonales bordantes (donc de profondeurs moindres). On remarque qu'un noeud est pointé par au plus 2 arcs par niveau plus profond. On montre que la taille du graphe enrichi est toujours en  $O(n)$ .

Chaque arc de l'arbre  $T$  enrichi correspond à deux diagonales  $d_1, d_2$  bordant un polygone. On calcule le "sablier" interne à ce polygone entre ces deux diagonales. Ce sablier permet de calculer efficacement les plus courts chemins entre un point de  $d_1$  et un point de  $d_2$ . Le calcul de ces sabliers peut-être fait de manière efficace en partant des triangles et en remontant dans  $T$ . Étant donné une suite de polygones adjacents par une diagonale, la concaténation des tels sabliers pour des polygones consécutifs fournit le sablier de l'union des polygones qui permet de calculer le plus court chemin entre des points dans les triangles.

En pratique, étant donnés  $x, y$  dans  $\mathcal{E}$ , on commence par calculer la séquence de diagonales traversées par  $\pi(x, y)$ . Elle correspond à l'unique chemin joignant les triangles contenant  $x$  et  $y$  dans l'arbre duale de la triangulation de  $P$ . Les première et dernière diagonales dans cette séquence sont les diagonales de coupe de deux noeuds  $v, w$  dans  $T$ . On considère l'unique chemin entre  $u$  et  $v$  dans  $T$  et on fusionne de manière appropriée les sabliers associés. Voir les détails (compliqués) dans [GH89] et [Her91].

Voir également *A near optimal algorithm for finding Euclidean shortest path in polygonal domain*, Rajasekhar Inkulu, Sanjiv Kapoor, S. N. Maheshwari. Soumis sur ArXiv <http://arxiv.org/abs/1011.6481>