# Chapitre 7

# Optimisation et homotopie

## 7.1 Calcul d'une base optimale du $\pi_1$

### 7.1.1 Cas des graphes

Suivant la discussion qui précède la proposition 6.2.4, on peut construire une base libre $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ de $\pi_1(G,x)$ à partir des arêtes complémentaires d'un arbre maximal en temps proportionnel à la taille $\sum_{e\in E'}|\gamma_e^T|$ de cette base. Remarquons cependant que toutes les bases de $\pi_1(G,x)$ ne proviennent pas nécessairement d'une telle construction.

Peut-on calculer efficacement une base de taille minimale ? Existe-t-il une base minimale associée à un arbre couvrant ? Avant de répondre (positivement) à ces deux questions "géométriques", donnons un petit lemme préparatoire :

**Lemme 7.1.1** *Soit $L$ un groupe libre de rang fini $n$ et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une base de $L$. Alors pour toute base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $L$, il existe une permutation $\sigma$ de $[1, n]$ telle que $x_i$ apparaît dans l'expression réduite de $u_{\sigma(i)}$ en fonction des $x_j$.*

**Preuve :** Soit $f$ l'automorphisme de $L$ défini par $f(x_i) = u_i$. Par passages aux quotients, $f$ défini un automorphisme du groupe libre commutatif de rang $n$, $L/[L,L]$. Il suffit donc de prouver la propriété pour les automorphismes de $\mathbb{Z}$-modules de rang $n$. Or la matrice d'un tel automorphisme est inversible, donc de déterminant non nul. L'un des $n!$ termes de l'expression usuelle du déterminant est donc non nul, ce qui exprime précisément la propriété recherchée. $\square$

**Proposition 7.1.2** *Soit $x \in V$ un sommet d'un graphe connexe fini $G$, alors la base de $\pi_1(G,x)$ associée à l'arbre de tout parcours en largeur de $G$ à partir de $x$ est de taille minimale.*

**Preuve :** Soit $T$ l'arbre d'un parcours en largeur à partir de $x$ et soit $E'$ l'ensemble des cordes de $T$ dans $G$. Par définition de $T$, on a que pour tout sommet $y \in V$, la distance de $x$ à $y$ dans $G$ coïncide avec cette distance dans $T$, i.e. avec $|\gamma_{x,y}^T|$. Pour tout $e \in E'$, on remarque donc que $\{\gamma_e^T\}$ est un lacet de point base $x$ contenant $e$ de taille minimale avec cette propriété.

Considérons une base $B$ de $\pi_1(G, x)$. D'après le lemme préparatoire, les éléments de la base $B_T = \{\gamma_e^T\}_{e \in E'}$ peuvent être mis en bijection avec les éléments de $B$ de sorte que $\gamma_e^T$ apparaisse dans l'expression réduite (dans $B_T$) de son correspondant dans $B$. On en déduit que $e$ apparaît dans tout lacet représentant ce correspondant, et la remarque précédente permet de conclure. □

**Exercice 7.1.3** *Montrer, sans utiliser la notion de groupe, que parmi toutes les bases associées à des arbres couvrants, celles associées à des parcours en largeur sont de taille minimale.*

Solution : On note $d_G(y)$ (resp. $d_T(y)$) la distance de $y$ à $x$ dans $G$ (resp. dans $T$). Soit $y$ tel que $d_T(y) > d_G(y)$, avec $d_G(y)$ minimal. Soit $\gamma_y^G$ un p.c.c. reliant $y$ à $x$ dans $G$. Soit $e = (y, z)$ le premier arc de $\gamma_y^G$, alors $d_G(z) = d_G(y) - 1 = d_T(z) < d_T(y) - 1$ et donc $e \notin T$. On considère le cycle $C$ formé de $e^{-1}$ et du p.c.c. de $y$ à $z$ dans $T$. Soit $T' = T \cup \{e'\} \setminus \{e\}$ où $e'$ est le successeur de $e^{-1}$ dans $C$. Comparer les tailles des bases associées à $T$ et $T'$ et conclure.

On remarquera que la proposition 7.1.2 reste vraie si on suppose que les arêtes de $G$ sont munies de poids positifs, que la taille est remplacée par le poids total, et que le parcours en largeur est modifié par l'algorithme de Dijkstra [CLRS02].

## 7.1.2 Cas des surfaces

De même que pour les graphes, il est possible de calculer une base minimale du groupe fondamentale d'une surface de manière efficace. L'algorithme qui suit est tiré de Erickson et Whittlesey [EW05].

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée orientable sans bord de genre $g$ et $x$ un sommet de $\mathcal{M}$. Comme pour les graphes, on commence par calculer un arbre couvrant $T$ obtenu par un parcours en largeur. Pour toute corde $e$ de $T$ dans le 1-squelette $\mathcal{M}^1$, on a un lacet $\gamma_e^T$ qui est le plus court lacet de base $x$ contenant $e$ (cf. la preuve de la proposition 7.1.2). On définit de manière récursive un *générateur glouton* $\gamma_{e_i}^T$, $i \geq 1$ par [1]

$\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$ *est connexe et* $|\gamma_{e_i}^T|$ *est minimal avec cette propriété.*

Soit $G_i^*$ le graphe dual de $\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$, c'est-à-dire le graphe d'adjacence entre les faces de $\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$. Dire que $\mathcal{M} \setminus (T \cup \{e_1, \ldots, e_i\})$ est connexe équivaut à dire que $G_i^*$ est connexe. Il est facile de voir à l'aide la caractéristique d'Euler que le graphe dual $G^*$ de $\mathcal{M} \setminus T$ possède $2g$ cycles. Il y a donc $2g$ générateurs gloutons. Ces générateurs peuvent être vus comme associés aux cordes de $T$ dans $H = T \cup \{e_1, \ldots, e_{2g}\}$. Comme $\mathcal{M} \setminus H$ est un disque (une arborescence de triangles), on se retrouve dans la situation précédant la proposition 6.2.9, et les générateurs gloutons forment donc une base de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, dite *gloutonne*. Les classes d'homologies des générateurs gloutons constituent également de ce fait une base de $H_1(\mathcal{M})$.

1. Si $A$ est un sous-ensemble d'arêtes de $\mathcal{M}$, On désigne par $\mathcal{M} \setminus A$ la surface à bord obtenue en coupant $\mathcal{M}$ le long des arêtes de $A$.

Le graphe dual $G^*_{2g}$ de $\mathcal{M} \setminus H$ constitue un arbre couvrant $K^*$ de $G^*$. On associe à chaque arête $e^*$ de $G^*$ le poids $|\gamma_e^T|$, longueur du lacet associé à la corde $e$ de $T$ primale de $e^*$. On remarque alors que $K^*$ est un arbre couvrant de poids maximal dans $G^*$. En effet, par définition $e_i^*$ est une arête de poids minimal et appartient à un cycle de $G^*_{i-1}$. Ceci donne une définition globale d'une base gloutonne.

**Définition 7.1.4** *Fixons une base gloutonne de $(\mathcal{M}, x)$. Soit $\ell$ un lacet de $(\mathcal{M}, x)$. Un* facteur homologique *de $\ell$ (relativement à la base gloutonne fixée) est un générateur glouton qui apparaît avec un coefficient non nul dans l'expression de la classe d'homologie de $\ell$ sur la base gloutonne.*

**Lemme 7.1.5** *Avec les notations précédentes, on a que pour toute corde $e$ de $T$ dans $\mathcal{M}^1$, le lacet $\gamma_e^T$ est au moins aussi long que chacun de ses facteurs homologiques.*

**Preuve :** Si $\gamma_e^T$ est un générateur glouton, il n'y a rien à montrer. Supposons que ce n'est pas le cas. Soient alors $\gamma_{e_1}^T, \dots, \gamma_{e_k}^T$ les générateurs gloutons qui ne sont pas plus longs que $\gamma_e^T$. On pose $G_k = T \cup \{e_1, \dots, e_k\}$.

Si $\mathcal{M} \setminus (G_k \cup \{e\})$ est connexe, alors $k < 2g$ et par définition de $k$, on a que $\gamma_{e_{k+1}}^T$ est strictement plus long que $\gamma_e^T$, ce qui contredit la définition d'une base gloutonne. Donc $\mathcal{M} \setminus (G_k \cup \{e\})$ n'est pas connexe, tandis que $\mathcal{M} \setminus G_k$ l'est. Soit $\mathcal{M}'$ une des deux composantes de $\mathcal{M} \setminus (G_k \cup \{e\})$. L'arête $e$ apparaît exactement une fois sur le bord de $\mathcal{M}'$. Lequel bord est inclus dans $G_k \cup \{e\}$. La classe d'homologie de ce bord est donc une combinaison des classes d'homologies de $\gamma_{e_1}^T, \dots, \gamma_{e_k}^T$ et $\gamma_e^T$, avec un coefficient $\pm 1$ pour cette dernière. Comme la classe d'homologie de ce bord est nulle (c'est un bord !), on en déduit que la classe d'homologie de $\gamma_e^T$ s'exprime en fonction de celles de $\gamma_{e_1}^T, \dots, \gamma_{e_k}^T$. $\square$

**Lemme 7.1.6** *Tout lacet de point base $x$ est au moins aussi long que chacun de ses facteurs homologiques.*

**Preuve :** Soit $\ell$ un lacet de $(\mathcal{M}, x)$. On exprime la classe d'homotopie de $\ell$, vu comme lacet de $(\mathcal{M}^1, x)$, dans la base libre associée aux cordes de $T$ dans $\mathcal{M}^1$ : $\ell \simeq \gamma_{a_1}^T, \dots, \gamma_{a_p}^T$. On suppose que cette expression est réduite, de sorte que chaque arête $a_i$ apparaît nécessairement dans $\ell$. Par conséquent $\ell$ est plus long que chaque $\gamma_{a_i}^T$. Mais tout facteur homologique de $\ell$ est facteur homologique de l'un des $\gamma_{a_i}^T$, et on conclut avec le lemme précédent. $\square$

**Lemme 7.1.7** *Pour toute base $\{\ell_i\}_{1 \le i \le 2g}$ de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, il existe une permutation $\sigma$ de $[1, 2g]$ telle que pour tout $i \in [1, 2g]$, le générateur glouton $\gamma_{e_{\sigma(i)}}$ est un facteur homologique de $\ell_i$.*

**Preuve :** La preuve est essentiellement la même que pour le lemme 7.1.1. $\square$

Les deux lemmes précédents impliquent immédiatement que

**Proposition 7.1.8** *Toute base gloutonne est de longueur totale minimale parmi toutes les bases de* $\pi_1(\mathcal{M}, x)$.

On remarque comme pour les graphes que la proposition reste vraie si on suppose que les arêtes de $\mathcal{M}$ sont munies de poids positifs, que la taille est remplacée par le poids total, et que le parcours en largeur est modifié par l'algorithme de Dijkstra [CLRS02].

**Théorème 7.1.9** *Soit* $\mathcal{M}$ *une surface triangulée orientable sans bord de genre* $g$ *ayant un nombre total* $n$ *de sommets, arêtes et faces. Il existe un algorithme de complexité* $O(n \log n + gn)$ *qui calcule une base minimale de* $\pi_1(\mathcal{M}, x)$.

**Preuve :** Il suffit d'après la proposition précédente de construire une base gloutonne. Pour cela on commence par calculer un arbre couvrant $T$ de plus courts chemins à l'aide de l'algorithme de Dijkstra en temps $O(n \log n)$. On peut en temps linéaire calculer la longueur de $\gamma_e^T$ pour chaque corde de $T$. D'après la définition globale d'une base gloutonne, il suffit ensuite de calculer un arbre couvrant $K^*$ de poids maximal dans le graphe d'adjacence $G^*$ des faces de $\mathcal{M} \setminus T$ muni des poids $|\gamma_e^T|$. Ceci peut se faire en temps $O(n \log n)$ par des algorithmes classiques de calcul d'arbre couvrant de poids maximal (ou minimal) [CLRS02]. Soient $\{e_1, \ldots, e_{2g}\}$ l'ensemble des arêtes primales correspondant aux cordes de $K^*$ dans $G^*$, alors $\{\gamma_{e_1}, \ldots, \gamma_{e_{2g}}\}$ constitue une base gloutonne qui peut être construite en temps proportionnel à sa taille $O(gn)$. □

## 7.2 Calculs de lacets sur les surfaces

Un bon nombre d'algorithmes et de problèmes portant sur l'homotopie des courbes sur les surfaces ont été étudiés ces dernières années. Citons :

- le test d'homotopie entre deux courbes [DS95, DG99],
- le calcul de système fondamental canonique de lacets pour l'homotopie [VY90, LPVV01],
- le calcul d'un système fondamental minimal dans sa classe d'homotopie [CdVL05],
- le calcul d'une décomposition en pantalons minimale dans sa classe d'homotopie [CdVL07],
- le calcul d'un cycle non contractile ou d'un cycle non séparateur minimal [MT01, CM05],
- le calcul d'une courbe minimale dans sa classe d'homotopie [CE06],
- le calcul d'un cycle séparateur minimal [CCdVE+08],
- etc...