Chapitre 3

Homologie en dimension supérieure

3.1 Complexes simpliciaux et homologie simpliciale

Pour construire des espaces topologiques ayant une description combinatoire on utilise des briques élémentaires appelées simplexes.

Définition 3.1.1 *Un* simplexe *affine de dimension n, ou n-simplexe affine, est l'enveloppe convexe dans un espace $\mathbb{R}^p$ de $n+1$ points, appelés sommets, affinement indépendants. Une* face *d'un simplexe σ est un simplexe défini par un sous-ensemble des sommets de σ.*

La notion de complexe simplicial permet de définir précisément ce qu'est un assemblage de briques élémentaires convenablement recollées entre-elles.

Définition 3.1.2 *Un* complexe simplicial *affine de $\mathbb{R}^p$ est une collection $\mathcal{C}$ de simplexes de $\mathbb{R}^p$ telle que*

1. *toute face d'un simplexe de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$,*
2. *deux simplexes quelconques de $\mathcal{C}$ s'intersectent selon une face commune, éventuellement vide.*

*La réunion de tous les simplexes de $\mathcal{C}$, vue comme sous-espace topologique de $\mathbb{R}^p$, est appelée l'*espace total *du complexe*[1] *La* dimension *d'un complexe simpliciale est la dimension maximale de ses simplexes.*

Comme pour les graphes et les surfaces triangulées, on définit les groupes d'homologie d'un complexe simplicial à partir d'espaces de chaînes et de morphismes de bord.

Définition 3.1.3 *L'espace des n-*chaînes *d'un complexe simplicial est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles finies de ses n-simplexes. Cet espace est naturellement muni d'une structure de groupe, module ou espace vectoriel, selon que les coefficients des combinaisons linéaires sont respectivement pris dans un groupe, anneau ou corps. On note $C_n(K)$ l'espace des n-chaînes du complexe K.*

1. On suppose ici que $\mathcal{C}$ est localement fini, c'est-à-dire que chaque point de l'espace total a un voisinage qui intersecte un nombre fini de simplexes. Cette condition est évidemment vérifiée si $\mathcal{C}$ est fini.

Soit σ un n-simplexe de sommets $s_0, \ldots, s_n$. On définit une relation d'équivalence sur les permutations des sommets de σ : deux permutations sont dites équivalentes si elles ont même parité. Tout n-simplexe σ pour $n \geq 1$ (resp. $n = 0$) possède donc deux classes (resp. une classe) d'équivalence de permutations. Une *orientation* de σ est le choix d'une de ses classes d'équivalence. La notation $[s_0, s_1, \ldots, s_n]$ désigne le simplexe σ, doté de l'orientation définie par la permutation (ou ordre) $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$. On a ainsi un isomorphisme entre l'espace des n-chaînes de simplexes et l'espace des n-chaînes de simplexes *orientés* modulo les relations

$$[\phi(s_0), \phi(s_1), \ldots, \phi(s_n)] = (-1)^{signe(\phi)}[s_0, s_1, \ldots, s_n] \tag{3.1}$$

où ϕ désigne une permutation quelconque de $s_0, \ldots, s_n$.

On définit ensuite le *bord* d'un simplexe orienté par

$$\partial_n[s_0, s_1, \ldots, s_n] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[s_0, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, s_n]$$

où $\hat{s_i}$ dénote l'omission du sommet s_i. Le bord est compatible avec les relations (3.1) (c'est un exercice !). Cela permet de définir le bord d'un n-simplexe, *muni d'une orientation par défaut*, modulo ces relations. Ce bord est une $(n-1)$-chaîne et le bord d'une n-chaîne est obtenu par extension linéaire :

$$\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K), \qquad \sum \alpha_\sigma \sigma \mapsto \sum \alpha_\sigma \partial_n \sigma$$

où $\sum \alpha_\sigma \sigma$ désigne une n-chaîne de coefficients α_σ. Notons que l'opérateur bord dépend de l'orientation par défaut de chaque simplexe.

La relation essentielle dit que le bord d'un bord est nul :

Lemme 3.1.4 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Preuve : Puisque les simplexes orientés génèrent les chaînes de simplexes (modulo les relations (3.1)), il suffit de vérifier la relation ci-dessus pour les simplexes orientés :

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n[s_0, s_1, \ldots, s_n] = \partial_{n-1}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[s_0, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, s_n])$$

Or,

$$\partial_{n-1}[s_0, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, s_n] = \sum_{j<i}(-1)^j[s_0, \ldots, \hat{s_j}, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, s_n] - \sum_{j>i}(-1)^j[s_0, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, \hat{s_j}, \ldots, s_n]$$

D'où

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n[s_0, s_1, \ldots, s_n] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}[s_0, \ldots, \hat{s_j}, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, s_n] - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j>i}(-1)^{i+j}[s_0, \ldots, \hat{s_i}, \ldots, \hat{s_j}, \ldots, s_n] = 0$$

puisque les deux membres de cette différence portent sur les mêmes termes. □

Définition 3.1.5 *Soit K un complexe simplicial. Le groupe des n-*cycles *de K est le noyau du bord ∂_n. On le note $Z_n(K)$. Le groupe des n-*bords *de K est l'image de ∂_{n+1}. On le note $B_n(K)$. Le lemme précédent montre que $B_n(K) \subset Z_n(K)$, ce qui permet de définir le n-ième groupe d'homologie de K par le quotient*

$$H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K) = \ker \partial_n / im\ \partial_{n+1}$$

L'intérêt principal des groupes d'homologie réside dans leur invariance par rapport à la subdivision utilisée pour les calculs.

Théorème 3.1.6 *À isomorphisme près, les groupes d'homologie $H_n(K)$ ne dépendent que de l'espace total $|K|$ du complexe K et non de la décomposition simpliciale particulière utilisée pour les calculer.*

Dit autrement l'homologie est un invariant topologique. La démonstration de ce théorème est difficile et repose sur la notion d'homologie singulière qui s'applique à tous les espaces topologiques, sans restriction à des espaces triangulés. On pourra consulter Hatcher [Hat02] ou Munkres [Mun93] sur le sujet.

3.2 Homologie à coefficients entiers

Pour définir les groupes de chaînes d'un complexe simplicial K on a vu que l'on avait un certain choix sur le type de coefficients intervenant dans les combinaisons linéaires formelles de simplexes. A priori chaque type de coefficients donne des groupes de chaînes différents et donc des groupes d'homologie différents. Il se trouve qu'à partir du calcul de l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ on peut déduire l'homologie avec n'importe quel autre type de coefficients par un calcul qui ne fait plus intervenir le complexe K. Cette propriété universelle qu'ont les coefficients entiers porte le nom de *théorème des coefficients universels* dans la littérature. Il est donc intéressant de pouvoir calculer en premier lieu l'homologie sur $\mathbb{Z}$.

3.2.1 Forme normale de Smith des matrices à coefficients entiers

En choisissant des coefficients entiers les groupes de chaînes se trouvent munis d'une structure de $\mathbb{Z}$-module libre (l'ensemble des n-simplexes forme par définition une base des n-chaînes). On peut donc représenter chaque morphisme de bord ∂_n par une matrice entière relativement à des bases des groupes $C_n(K)$ et $C_{n-1}(K)$. Pour des bases convenablement choisies cette matrice prend une forme particulière, appelée forme (normale) de Smith (1861), à partir de laquelle on peut directement lire l'homologie de K.

Définition 3.2.1 *Une matrice à coefficients entiers est dite sous* forme normale de Smith *si elle est diagonale et si chaque coefficient diagonal est non-négatif et multiple du coefficient précédant dans la diagonale.*

Notons que certains coefficients (nécessairement les derniers) peuvent être nuls.

Théorème 3.2.2 *Soit $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ un morphisme de $\mathbb{Z}$-module. Il existe des bases de $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Z}^q$ relativement auxquelles la matrice de u est sous forme de Smith. De plus, cette forme est unique.*

On a le lemme préparatoire, avec les notations du théorème :

Lemme 3.2.3 *Il existe des bases de $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Z}^q$ relativement auxquelles tous les coefficients de la matrice (m_{ij}) de u sont multiples du coefficient m_{11}, avec $m_{11} \geq 0$.*

Preuve : Soit $M = (m_{ij})$ la matrice de u relativement à une base (e_i) de $\mathbb{Z}^p$ et à une base (f_j) de $\mathbb{Z}^q$ (par exemple les bases canoniques). On suppose $u \neq 0$, le lemme étant trivial dans le cas contraire. Soit m_{ij} un coefficient non-nul de valeur absolue minimale. Quitte à changer e_i en son opposé, on supposera que m_{ij} est positif. La preuve s'obtient par récurrence sur $\alpha = m_{ij}$. Elle repose sur les propriétés évidentes suivantes : Remplacer le vecteur e_h par $e_h + \lambda e_k$ dans la base (e_i) change la colonne C_h de M par $C_h + \lambda C_k$ dans la matrice de u et remplacer le vecteur f_r par $f_r + \lambda f_s$ dans la base (f_j) change la ligne L_s de M par $L_s - \lambda L_r$ dans la matrice de u.

1. Ou bien α divise tous les coefficients de M. Les changements de bases qui échangent e_1 avec e_i et f_1 avec f_j permutent les coefficients de M de sorte que $m_{11} = \alpha$. Le lemme est donc vérifié.
2. Ou bien α ne divise pas l'un des coefficients, m_{ik}, de sa ligne i. On a par division euclidienne : $m_{ik} = \lambda\alpha + \alpha'$ avec $0 < \alpha' < \alpha$. Le changement de base remplaçant e_k par $e_k - \lambda e_j$ transforme le coefficient m_{ik} de M en α'. On invoque alors l'hypothèse de récurrence pour conclure.
3. Ou bien α ne divise pas l'un des coefficients de sa colonne j, et un raisonnement analogue au précédent permet de conclure.
4. Ou bien tous les coefficients de la ligne i et de la colonne j sont multiples de α, mais un coefficient m_{kl} n'est pas divisible par α. On a en particulier $m_{il} = \lambda\alpha$. On effectue le changement de base remplaçant e_l par $e_l - (\lambda - 1)e_j$, de sorte que le coefficient m_{il} est transformé en α et le coefficient m_{kl} en un certain m'_{kl}. Ou bien $|m'_{kl}| < \alpha$, et on conclut par récurrence, ou bien on se retrouve dans la configuration 3 précédente ($m'_{il} = \alpha$ ne divise pas m'_{kl}) ce qui permet également de conclure.

$\square$

Preuve du théorème 3.2.2 : Par le lemme précédent on peut supposer avoir choisi une base (e_i) de $\mathbb{Z}^p$ et une base (f_j) de $\mathbb{Z}^q$ telles que tous les coefficients de la matrice (m_{ij}) de u dans ces bases sont multiples du coefficient $m_{11} \geq 0$. On suppose à nouveau $u \neq 0$ et donc $m_{11} > 0$. Le changement de base qui remplace tous les $e_j, j > 1$, par $e_j - \frac{m_{1j}}{m_{11}} e_1$ et f_1 par $f_1 + \sum_{i>1} \frac{m_{i1}}{m_{11}} f_i$ laisse inchangé le coefficient m_{11} et annule tous les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne. Dans cette base, la matrice de u est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où M' est une matrice dont tous les coefficients sont multiples de m_{11}. On termine la preuve de l'existence d'une forme normale par récurrence sur la dimension de M, en remarquant que les changements de bases mis en jeux pour mettre M' sous forme de Smith n'affectent pas la première ligne ni la première colonne de M et que tous les coefficients restent des multiples de m_{11}.

Il reste à vérifier l'unicité. On note pour cela que les changements de bases se traduisent par des multiplications à gauche et à droite de la matrice de u par des matrices carrées à coefficients entiers et de déterminants ± 1 (puisque ces matrices sont inversibles sur $\mathbb{Z}$). De telles matrices sont dites *unimodulaires* et se décomposent en produit d'*opérations élémentaires* sur les lignes et les colonnes comme vu dans la preuve ci-dessus : transposition de lignes (colonnes) ou ajout du multiple d'une ligne (colonne) à une autre ligne (colonne) ou multiplication d'une ligne (colonne) par -1. Soit d_i le p.g.c.d. de l'ensemble des sous-déterminants, ou mineurs, d'ordre i de la matrice de u relativement à des bases fixées (on pose $d_0 = 1$). On vérifie que les opérations élémentaires ne modifient pas les d_i ; c'est évident pour les permutations de lignes et colonnes et résulte facilement de la multi-linéarité du déterminant dans les autres cas. Le quotient d_i/d_{i-1}, $1 \leq i \leq rang(u)$, est donc indépendant des bases fixées. Or, dans le cas d'une forme de Smith ce quotient est précisément le $i$ème coefficient diagonal. □

La preuve ci-dessus de l'existence d'une forme normale fournit de fait un algorithme facilement implémentable en machine. La complexité d'un tel algorithme, en particulier la croissance des coefficients dans les calculs intermédiaires, semble néanmoins difficile à évaluer. Kannan et Bachem [KB79] ont montré que la mise sous forme normale d'une matrice à coefficients entiers pouvait être obtenue en temps polynomial en fonction du nombre total de bits utilisés pour coder les entiers de la matrice. Leur algorithme est également exposé dans le livre de Yap [Yap00, chap, 10]. De nombreuses améliorations ont été obtenues depuis [Sto98, DSV01].

Exercice 3.2.4 (Classification des groupes commutatifs de type fini) *Soit G un groupe commutatif de type fini. Dit autrement, G contient une famille* finie *$\{e_1, \dots, e_n\}$ telle que tout élément de G est combinaison linéaire à coefficients entiers des e_i. On veut montrer qu'il existe des nombres entiers $\beta \geq 0$ et $1 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_r$ avec τ_i divise τ_{i+1}, $1 \leq i \leq r-1$, tels que G est isomorphe au groupe*

$$\mathbb{Z}^\beta \times \mathbb{Z}/\tau_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\tau_r\mathbb{Z} \tag{3.2}$$

De plus cette décomposition est unique au sens où les nombres $\beta, \tau_1, \dots, \tau_r$ sont entièrement déterminés par G. L'entier β est le rang *de G et les τ_i ses* coefficients de torsion.

1. *Soit $\phi : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ un morphisme de groupe (i.e. une application $\mathbb{Z}$-linéaire). Montrer à l'aide du théorème 3.2.2 que le groupe $coker\phi = \mathbb{Z}^q/im\ \phi$ est de la forme (3.2) ci-dessus et que cette forme est unique.*
2. *Soit G un groupe commutatif de type fini. Exhiber un morphisme surjectif $\phi : \mathbb{Z}^q \to G$ et en déduire que G est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}^q$ par un sous-groupe de $\mathbb{Z}^q$.*
3. ***Sous-groupe d'un groupe libre.** Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}^q$. Montrer que H est isomorphe à un $\mathbb{Z}^p$ avec $p \leq q$. On pourra raisonner par récurrence sur q :*

(a) Vérifier l'assertion pour $q = 1$.
(b) Pour l'étape inductive, on considère le sous-groupe $H' = (\mathbb{Z}^{q-1} \times \{0\}) \cap H$ de $\mathbb{Z}^{q-1} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}^{q-1}$. Conclure si $H = H'$.
(c) Sinon, soit $x \in (H \setminus H')$ de q-ième coordonnée minimale en valeur absolue. Montrer que $H = H' \oplus \mathbb{Z}x$ et conclure.

4. *Déduire de ce qui précède que tout groupe commutatif de type fini est isomorphe à groupe de la forme (3.2) et que cette forme est unique.*

3.2.2 Calcul effectif des groupes d'homologie

Étant donné un complexe simplicial K fini (ayant un nombre fini de simplexes), il est possible de calculer explicitement ses groupes d'homologie sur $\mathbb{Z}$. On se sert pour cela de la forme normale de Smith des matrices des opérateurs bord. Pour simplifier les calculs des groupes d'homologie on utilise une forme de Smith modifiée obtenue par simple permutation des colonnes de la forme normale :

Définition 3.2.5 *Une matrice à coefficients entiers est sous* forme de Smith modifiée *si elle est de la forme*

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \tau_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \tau_r \\ \hline 0 & & 0 & \end{array}\right) \tag{3.3}$$

où $\tau_1|\tau_2|\ldots|\tau_r$ et $\tau_i > 0$, $1 \leq i \leq r$.

Lemme 3.2.6 *On peut trouver des bases de $C_{n-1}(K), C_n(K)$ et $C_{n+1}(K)$ pour lesquelles les matrices des bords ∂_n et ∂_{n+1} sont sous forme de Smith modifiée.*

Preuve : Par le théorème 3.2.2 on peut trouver des bases b_{n-1} et b_n de respectivement $C_{n-1}(K)$ et $C_n(K)$ telles que la matrice Δ_n du bord ∂_n est sous forme de Smith modifiée (3.3). Soit Δ_{n+1} la matrice de ∂_{n+1} relativement à b_n et à la base canonique (des simplexes) de $C_{n+1}(K)$. La relation du lemme 3.1.4 se traduit par $\Delta_n\Delta_{n+1} = 0$. Si Δ_n est de rang r, il en résulte que les r dernières lignes de Δ_{n+1} sont nulles. L'algorithme de mise sous forme de Smith appliqué à Δ_{n+1} ne manipule donc que les $k_n - r$ premiers vecteurs de b_n, où k_n est le nombre de n-simplexes de K. Mais la forme (3.3) indique que ces $k_n - r$ vecteurs sont dans le noyau de ∂_n et il suit que ces manipulations ne modifient pas Δ_n. □

Proposition 3.2.7 *Supposons avoir choisi des bases de $C_{n-1}(K), C_n(K)$ et $C_{n+1}(K)$ pour lesquelles les matrices Δ_n et Δ_{n+1} des bords ∂_n et ∂_{n+1} sont sous forme de Smith modifiée. Soient r et r' les rangs respectifs de Δ_n et de Δ_{n+1}, soit k_n le nombre de n-simplexes de K et $\tau_1|\tau_2|\ldots|\tau_{r'}$ les coefficients non-nuls de Δ_{n+1}. Alors $H_n(K)$ est isomorphe à*

$$\mathbb{Z}^\beta \times \mathbb{Z}/\tau_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\tau_{r'}\mathbb{Z}$$

où $\beta = k_n - r - r'$.

Notons que $\mathbb{Z}/\tau_i\mathbb{Z}$ est trivial pour $\tau_i = 1$.

Preuve : Notons $(e_1, e_2, \ldots, e_{k_n})$ la base choisie pour $C_n(K)$. On a alors de par la forme de Smith modifiée :

$$\text{im } \partial_{n+1} = < \tau_1 e_1, \tau_2 e_2, \ldots, \tau_{r'} e_{r'} > \text{ et } \ker \partial_n = < e_1, e_2, \ldots, e_{k_n - r} >$$

□

L'entier β s'appelle le n-ième nombre de Betti de K et les entiers $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r'}$ ses n-ième coefficients de Torsion.

3.3 Calcul des nombres de Betti

On se place ici dans le cas où les coefficients sont dans un corps F. Les groupes d'homologie $H_i(K)$ ont ainsi une structure de F-espace vectoriel. La dimension $\beta_i(K)$ de cet espace est le *ième nombre de Betti* de K (relativement aux coefficients F). Pour F de caractéristique nulle, le théorème des coefficients universels mentionné plus haut implique que ce nombre coïncide avec le $i$ème nombre de Betti de l'homologie entière.

On a $\beta_i(K) = \dim H_i(K) = \dim \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1} = \dim \ker \partial_i - \dim \text{im } \partial_{i+1}$. On en déduit une relation fameuse entre les nombres de Betti et les nombres de simplexes de chaque dimension d'un complexe.

Théorème 3.3.1 (Formule d'Euler-Poincaré) *Soit K un complexe simplicial fini de dimension k et n_i son nombre de simplexes de dimension i, alors*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \beta_i(K) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i n_i$$

Preuve : Par la formule du rang d'une application linéaire, on a

$$\dim \ker \partial_i = n_i - \dim \text{im } \partial_i$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \beta_i(K) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (n_i - \dim \text{im } \partial_i - \dim \text{im } \partial_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i n_i - (-1)^k \dim \text{im } \partial_{k+1} - \dim \text{im } \partial_0 \end{aligned}$$

Mais les bords ∂_0 et ∂_{k+1} sont nuls. □

Cette relation ne suffit évidemment pas à déterminer tous les nombres de Betti. On peut utiliser des méthodes matricielles pour les évaluer : si D_i est la matrice de ∂_i dans les bases canoniques des i et $(i-1)$-simplexes, on a ainsi $\beta_i(K) = corang(D_i) - rang(D_{i+1})$. Dans cet esprit, on pourra consulter la méthode du Laplacien combinatoire de Friedman [Fri98] issue de la théorie de Hodge.

3.3.1 Calcul incrémental

Repose sur un article de Delfinado et Edelsbrunner [DE95].

Soit K un complexe simplicial. On considère une filtration $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m$ de K dont les incréments sont des simplexes. On peut par exemple ajouter un à un les simplexes de K dans l'ordre de leur dimension en choisissant un ordre arbitraire entre les simplexes de même dimension. Le principe du calcul incrémental est de maintenir les nombres de Betti de K_j pour j variant de 1 à m.

Proposition 3.3.2 *Soient K, K' des complexes tels que $K' = K \cup \sigma$ où σ est un k-simplexe de K'. Si le bord de σ dans K' borde également dans K, alors*

$$\beta_i(K') = \begin{cases} \beta_i(K) + 1 & \text{si } i = k \\ \beta_i(K) & \text{sinon} \end{cases}$$

Sinon

$$\beta_i(K') = \begin{cases} \beta_i(K) - 1 & \text{si } i = k-1 \\ \beta_i(K) & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : On note avec un prime les objets relatifs à K'. On remarque d'abord que les complexes de chaîne [2].de K et de K' sont identiques en dehors du segment

$$C_k \overset{\partial_k}{\to} C_{k-1}$$

en particulier pour $i \neq k$ on a $\ker \partial'_i = \ker \partial_i$ et $\operatorname{im} \partial'_i = \operatorname{im} \partial_i$. Donc $\beta'_i = \beta_i$ pour $i \neq k, k-1$.

Supposons que $\partial'_k \sigma$ borde dans K, i.e. $\partial'_k \sigma \in \operatorname{im} \partial_k$. Alors $\operatorname{im} \partial'_k = \operatorname{im} \partial_k$. En particulier $H'_{k-1} = H_{k-1}$ et $\beta'_{k-1} = \beta_{k-1}$. De plus,

$$\dim \ker \partial'_k = \dim C'_k - \dim \operatorname{im} \partial'_k = \dim C_k + 1 - \dim \operatorname{im} \partial_k = \dim \ker \partial_k + 1$$

On en déduit $\beta'_k = \dim \ker \partial'_k - \dim \operatorname{im} \partial'_{k+1} = \beta_k + 1$.

Supposons maintenant que $\partial'_k \sigma \notin \operatorname{im} \partial_k$. Alors $\dim \operatorname{im} \partial'_k = \dim \operatorname{im} \partial_k + 1$ et $\ker \partial'_k = \ker \partial_k$. Ce qui permet également de conclure $\beta'_{k-1} = \beta_{k-1} - 1$ et $\beta'_k = \beta_k$. □

Notons que la condition « $\partial\sigma$ borde également dans K » dans la proposition équivaut à dire que σ est dans le support d'un cycle de K'.

Dans la pratique, si K possède m simplexes, la proposition précédente permet de calculer les nombres de Betti en m étapes. Chaque étape consiste à déterminer si le simplexe ajouté dans la filtration est dans le support d'un cycle ou non. Pour le calcul de β_0, cela se réduit à vérifier si une arête appartient à un cycle, c'est-à-dire si ses extrémités appartiennent à une même composante connexe. En particulier, β_0 compte le nombre de composantes connexes. La structure Union-Find permet par exemple de calculer β_0 en temps $O(m\alpha(m))$ où $\alpha(m)$ est "l'inverse" de la fonction d'Ackermann. Des extensions aux surfaces et aux complexes de dimension 2 plongés dans $\mathbb{R}^3$ sont exposées dans [DE95].

2. C'est-à-dire la suite de morhismes $\cdots \to C_k \overset{\partial_k}{\to} C_{k-1} \to \cdots$ vérifiant $\partial_k \partial_{k+1} = 0$

3.4 Le foncteur homologique

L'homologie peut être vue comme une boîte noire qui transforme un espace topologique en groupes. L'objectif est de pouvoir "comparer" plus facilement des formes puisqu'intuitivement un groupe est un objet plus simple qu'un espace topologique. Le fait de pouvoir comparer des objets est intimement lié à l'existence de relations entre ces objets. Pris isolément, les objets d'un univers n'ont pas d'intérêt particulier. Leurs richesses provient de la possibilité de les mettre en relation. Dans le langage des catégories ces relations ont pour nom *morphismes* (ou *flèches*). Ainsi, les morphismes de la catégorie des espaces topologiques sont les applications continues, ceux de la catégorie des groupes, les morphismes de groupes. Une transformation entre les objets de deux catégories est d'autant plus opérante qu'elle s'applique également aux relations entre les objets. On sous-entend ici une cohérence minimale entre les transformations des objets et des morphismes. Une transformation ayant cette double capacité s'appelle un *foncteur*. De fait, l'homologie définie un foncteur entre la catégorie des espaces topologiques avec les applications continues et la catégorie des groupes avec les morphismes de groupes. Dit autrement, si $f : X \to Y$ est une application continue entre les espaces X et Y alors on sait définir un morphisme $H_*(f) : H_*(X) \to H_*(Y)$ entre leurs groupes d'homologie. Dans notre cadre algorithmique les espaces topologiques sont remplacés par les complexes simpliciaux. La notion d'application continue est alors remplacée par celle d'*application simpliciale.*

Définition 3.4.1 *Une application $f : K \to L$ entre deux complexes K et L est dite* simpliciale *si elle envoie les sommets de K sur des sommets de L et simplexe de sommets $\{s_0, s_1 \dots, s_k\}$ sur le simplexe de sommets $f(\{s_0, s_1 \dots, s_k\})$.*

Une application simpliciale f induit, pour chaque dimension k, une application $f_\#$ sur les k-simplexes orientés en posant :

$$f_\#([s_0, s_1 \dots, s_k]) = \begin{cases} [f(s_0), f(s_1) \dots, f(s_k)] & \text{si la restriction de } f \text{ à } \{s_0, s_1 \dots, s_k\} \\ & \text{est injective,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $f_\#$ s'étend par linéarité en une application entre les groupes de chaînes respectifs de K et L. On vérifie aisément que cette extension commute avec l'opérateur bord. On en déduit que $f_\#$ envoie un cycle (resp. un bord) de K sur un cycle (resp. un bord) de L. Par conséquent $f_\#$ "passe au quotient" et induit un morphisme $H_*(f)$ entre les groupes d'homologie de K et L.

Exercice 3.4.2 *Vérifier que $H_*(Id_K) = Id_{H_*(K)}$ et que si $f : K \to L$ et $g : L \to M$ sont deux application simpliciales, alors $H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$. On dit que le foncteur d'homologie est* covariant.