

# Chapitre 1

## Homologie des graphes et des surfaces

### 1.1 Homologie des graphes

**Définition 1.1.1** Un graphe est un quadruplet  $G = (S, A, o, \iota)$ , où  $S$  et  $A$  sont des ensembles (respectivement de sommets et d'arcs (= arêtes orientées)),  $o : A \mapsto S$  une application qui associe à tout arc son origine et  $\iota : A \mapsto A$  une involution sans point fixe qui associe à tout arc son arc opposé (ou inverse).

Dans la pratique on note  $e^{-1} = \iota(e)$  l'arc inverse de l'arc  $e$ . Le sommet  $o(e^{-1})$  est la destination de l'arc  $e$  et une extrémité de  $e$  est soit son origine soit sa destination. Une boucle est un arc dont les extrémités sont confondues. Une arête (non-orientée) est une paire de la forme  $\{e, e^{-1}\}$ . Puisque  $\iota$  est une involution sans point fixe on peut écrire  $A = A^+ \cup (A \setminus A^+)$  où  $\iota$  réalise une bijection entre  $A^+$  et son complémentaire. Une arête s'identifie donc à un élément de  $A^+$ . Ceci permet de considérer les arêtes comme des arcs, c'est à dire que **les arêtes ont une orientation par défaut**. Nous utiliserons cette convention dans toute la suite de ce document.

La subdivision élémentaire d'une arête d'un graphe consiste à couper cette arête en deux en ajoutant un sommet au milieu de l'arête. Une subdivision d'un graphe est le résultat d'une séquence de subdivisions élémentaires. L'opération inverse d'une subdivision élémentaire est la fusion d'arêtes distinctes partageant un sommet de degré 2. Une telle fusion est dite induite par le sommet de degré deux commun.

Deux graphes sont dits combinatoirement équivalents s'ils ont des subdivisions isomorphes.

**Lemme 1.1.2** Deux graphes n'ayant aucun sommet de degré 2 sont combinatoirement équivalents si et seulement s'ils sont isomorphes.

**Preuve :** Soient  $G$  et  $H$  deux graphes combinatoirement équivalents et  $K$  une subdivision commune de  $G$  et  $H$ . On peut facilement se ramener au cas où  $G$  et  $H$  sont connexes. On décompose  $K$  en chaînes maximales d'arêtes séparées par des sommets de degré deux. Puisqu'une subdivision introduit un sommet de degré deux sans modifier le

degré des autres sommets, chaque sommet interne à une chaîne provient d'une subdivision appliquée à  $G$ . En appliquant les opérations de fusion inverses, il suit que chaque chaîne de  $K$  provient de la subdivision d'une arête de  $G$ . Ceci est également vrai pour  $H$ , ce qui permet de mettre en correspondance les arêtes de  $G$  et de  $H$ . Il reste à vérifier que cette correspondance induit bien un isomorphisme.  $\square$

**Corollaire 1.1.3** *Deux graphes sont combinatoirement équivalents si et seulement si les graphes obtenus après fusions successives induites par tous les sommets de degré deux sont isomorphes.*

La *caractéristique (d'Euler)* d'un graphe  $G$  est la quantité  $\chi(G) = |S| - |A^+|$ .

**Lemme 1.1.4** *Deux graphes combinatoirement équivalents ont même caractéristique.*

**Preuve :** Vérifier qu'une subdivision d'arête ne modifie pas la caractéristique.  $\square$

Une *contraction d'arête* dans un graphe consiste à supprimer l'arête puis à identifier ses extrémités dans le graphe.

On dit que deux graphes ont le même *type d'homotopie* si on peut passer de l'un à l'autre par une succession de contractions d'arêtes non-boucles (d'extrémités distinctes) et d'opérations inverses. On vérifie que la contraction d'arêtes non-boucles préserve la caractéristique. Deux graphes ayant le même type d'homotopie ont donc la même caractéristique.

La notion d'homologie pour les graphes apparaît dans un article de Kirchhoff de 1847 [BLW98, p. 133] traitant des circuits électriques. Ces derniers sont assimilés à des graphes dont les arêtes représentent les fils conducteurs possédant chacun une résistance et un générateur de tension (force électromotrice).

La Loi des tensions (ou des mailles) exprime que dans tout cycle (chemin fermé) d'un circuit électrique, on a la relation

$$\sum_j r_j I_j = \sum_j E_j$$

la somme portant sur les arcs du cycle orienté considéré ; les  $r_j$  désignent les résistances, les  $I_j$  les intensités des courants et les  $E_j$  les forces électromotrices. Connaissant les résistances et les forces électromotrices, et tenant compte de la loi des intensités (ou des noeuds), le problème de Kirchhoff est de trouver le nombre minimal de relations du type ci-dessus, et donc de cycles, permettant de déterminer les courants en fonction des résistances et des forces électromotrices. La réponse est donnée par le nombre *cyclomatique* du graphe sous-jacent au circuit électrique. C'est encore la dimension de l'*espace des cycles* ou *premier groupe d'homologie* de ce graphe.

### 1.1.1 $H_1$

On considère un graphe  $G = (S, A, o, \iota)$ .

**Définition 1.1.5** *L'espace des 0-chaînes (resp. des 1-chaînes) du graphe  $G$  est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles finies à coefficients réelles et à support fini de sommets (resp. d'arêtes) de  $G$ . Il possède une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel<sup>1</sup> de dimension  $|S|$  (resp.  $|A^+|$ ). On note  $C_0$  (resp.  $C_1$ ) l'espace des 0 (resp. 1)-chaînes. Le support d'une chaîne  $c$  est l'ensemble des sommets (arêtes) de coefficients non-nuls. On définit un opérateur bord  $\partial : C_1 \rightarrow C_0$  par extension linéaire de sa restriction aux arêtes :*

$$\begin{aligned} \partial : A^+ &\rightarrow C_0 \\ a &\mapsto o(a^{-1}) - o(a) \end{aligned}$$

**Définition 1.1.6** *L'espace des cycles de  $G$  est par définition le noyau de l'opérateur bord  $\partial$ . On le note  $H_1(G, \mathbb{R})$  ou plus simplement  $H_1(G)$ . On s'intéresse en général uniquement à la structure de groupe additif de  $H_1(G)$  et on l'appelle le premier groupe d'homologie de  $G$ .*

Un cycle est *simple* si aucun sommet n'est répété dans le cycle.

**Lemme 1.1.7** *Tout cycle est une combinaison de cycles simples.*

**Preuve :** Soit un cycle  $c = \sum_i \alpha_i a_i$ . On raisonne par récurrence sur  $|\text{support}(c)|$ . Si  $\text{support}(c)$  contient une arête boucle  $a_k$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $c - \alpha_k a_k$ . Sinon, soit  $\alpha_k \neq 0$  et  $\partial a_k = s - s'$ . Puisque  $c$  est un cycle, il existe  $i \neq k$  tel que  $a_i \in \text{support}(c)$  et  $\partial a_i = \pm(s' - s'')$ . Si  $s'' = s$  on a un cycle simple  $c' = a_k + \pm a_i$  dont le support est inclus dans  $\text{support}(c)$ . Sinon on continue jusqu'à retomber sur un sommet  $s, s', s'', \dots$  déjà rencontré. On en déduit un cycle simple  $c'$  de support inclus dans celui de  $c$ . Finalement, considérant une arête  $e_j \in \text{support}(c')$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $c - \alpha_j c'$ .  $\square$

**Corollaire 1.1.8** *Un arbre est acyclique, i.e. son espace des cycles est réduit à 0.*

**Preuve :** D'après le lemme précédent il suffit de remarquer qu'un arbre n'a pas de cycle simple par définition.  $\square$

On suppose  $G$  connexe. Soit  $T$  un arbre couvrant de  $G$ . Rappelons qu'une *corde* de  $T$  est une arête de  $G$  qui n'est pas dans  $T$ . On associe à chaque corde  $e$  (avec son orientation par défaut) de  $T$  le cycle  $c_e$  obtenu en complétant  $e$  avec l'unique chemin simple dans  $T$  joignant la destination à l'origine de  $e$ . Si  $e$  est un arc de  $G$  tel que  $e^{-1}$  est une corde de  $T$ , alors par convention  $c_e$  désigne le cycle  $-c_{e^{-1}}$ .

---

1. Plus généralement on peut prendre les coefficients des combinaisons linéaires dans un anneau, ou un autre corps. Les espaces de chaînes se trouvent alors respectivement munis d'une structure de groupe, de module ou d'espace vectoriel.

**Proposition 1.1.9** *Les cycles  $c_e$ , lorsque  $e$  parcourt l'ensemble des cordes de  $T$ , forment une base de  $H_1(G)$ .<sup>2</sup>*

**Preuve :** Ces cycles sont indépendants car chaque corde est dans le support d'un unique  $c_e$ . Montrons qu'ils sont générateurs de  $H_1(G)$ . Soit  $c = \sum_{a \in T} \alpha_a a + \sum_{e \in G \setminus T} \beta_e e$  un cycle quelconque de  $G$  décomposé selon les arêtes de l'arbre  $T$  et ses cordes. Le cycle  $c - \sum_{e \in G \setminus T} \beta_e c_e$  a son support inclus dans  $T$ , et est donc nul par le corollaire 1.1.8. D'où  $c = \sum_{e \in G \setminus T} \beta_e c_e$ .  $\square$

**Définition 1.1.10** *La dimension de  $H_1(G)$  est appelée nombre de cycles ou nombre cyclomatique ou encore premier nombre de Betti. On la note  $\beta_1(G)$ .*

Par la proposition 1.1.9, si  $G$  est connexe, le nombre cyclomatique est le nombre de cordes d'un arbre couvrant. Comme ce dernier a  $|S| - 1$  arêtes, on a  $\beta_1(G) = |A^+| - |S| + 1 = 1 - \chi(G)$ . Notons que  $\beta_1(G)$  est aussi le nombre maximal d'arêtes qu'on peut ôter à  $G$  sans le déconnecter.

Si  $G$  n'est pas connexe, il suffit de travailler indépendamment sur chacune de ses composantes connexes car l'homologie de  $G$  est la somme directe des homologies de chacune de ses composantes. On peut d'ailleurs affiner ce découpage pour travailler sur chaque "composante" 2-connexe (un bloc au sens de la théorie des graphes).

## 1.1.2 $H_0$

On définit également le groupe d'homologie de dimension 0.

$$H_0(G) = C_0 / \text{Im} \partial$$

**Proposition 1.1.11**

$$H_0(G) \simeq \mathbb{R}^{\beta_0(G)}$$

où  $\beta_0(G)$  est le nombre de composantes connexes de  $G$ .

**Preuve :** On numérote de 1 à  $\beta_0 := \beta_0(G)$  les composantes connexes de  $G$  et on considère l'application *augmentation*  $\epsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\beta_0}$ ,  $c \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\beta_0})$  où  $\sigma_i$  est la somme des coefficients de  $c$  sur les sommets de la composante  $i$  de  $G$ . Puisque  $\epsilon$  est surjective,  $\mathbb{R}^{\beta_0} \simeq C_0 / \ker \epsilon$ . Il suffit donc de montrer que  $\ker \epsilon = \text{Im} \partial$ . Or, pour toute arête  $e$ ,  $\epsilon(\partial e) = 0$ , d'où  $\text{Im} \partial \subset \ker \epsilon$ . Par ailleurs si  $c = \sum_j \alpha_j s_j \in \ker \epsilon$  a son support dans la composante  $i$ , on considère pour chaque sommet  $s_j$  de cette composante un chemin  $\gamma_j$  reliant  $s_1$  à  $s_j$ . On vérifie que  $c = \partial(\sum_j \alpha_j \gamma_j)$  et on en déduit  $\ker \epsilon \subset \text{Im} \partial$ .  $\square$

2. Dans le cas de l'homologie à coefficients entiers, ces cycles forment une base du groupe libre commutatif  $H_1(G, \mathbb{Z})$ .

## 1.2 Classification des surfaces

### 1.2.1 Triangulation et caractéristique

**Définition 1.2.1** Un 2-complexe simplicial affine de  $\mathbb{R}^n$  est une collection  $\mathcal{C}$  de sommets, arêtes, triangles de  $\mathbb{R}^n$  telle que

- toute extrémité d'une arête de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{C}$  et toute arête d'un triangle de  $\mathcal{C}$  est dans  $\mathcal{C}$ ,
- l'intersection de deux éléments distincts de  $\mathcal{C}$  est soit vide soit une face (sommet ou arête) commune de ces éléments.

La réunion de tous les éléments de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est appelée espace total.

**Définition 1.2.2** Une surface triangulée est un 2-complexe simplicial affine pur (tout sommet ou arête est incident à un triangle) tel que

- toute arête est incidente à un ou deux triangles,
- le graphe d'adjacence des triangles incidents à un sommet est soit un cycle soit une chaîne finie.

Les arêtes incidentes à deux triangles sont dites internes. Les autres constituent (avec leurs sommets) le bord de la surface.

Le 1-squelette ou graphe d'une surface triangulée  $\mathcal{M}$  est le graphe constitué des sommets et des arêtes de  $\mathcal{M}$ .

**Lemme 1.2.3** Les arêtes du bord d'une surface forment une union disjointe de cycles dans son 1-squelette.

**Preuve :** Il suffit de vérifier que chaque sommet du sous-graphe formé par les arêtes du bord est de degré deux. Mais ceci résulte de la définition d'une surface triangulée.  $\square$

**Définition 1.2.4** Le nombre de bords d'une surface triangulée est le nombre de composantes connexes, donc de cycles, de son bord.

Une triangulation d'une variété de dimension 2 est un homéomorphisme entre une surface triangulée et cette variété. T. Radó [Rad25, DM68, Moi77] a montré en 1925 que toute variété compacte de dimension 2 admet une triangulation. On confondra une triangulation avec la surface triangulée sous-jacente.

**Définition 1.2.5** La caractéristique (d'Euler) d'une surface  $\mathcal{M}$  triangulée est la somme alternée de son nombre de sommets  $S(\mathcal{M})$ , d'arêtes  $A(\mathcal{M})$ , et de triangles  $F(\mathcal{M})$  :

$$\chi(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) - A(\mathcal{M}) + F(\mathcal{M})$$

**Lemme 1.2.6** La caractéristique d'une triangulation d'un disque vaut 1.

**Preuve :** Voir la formule d'Euler dans l'étude des graphes planaires.  $\square$

**Définition 1.2.7** Soit  $\mathcal{M}$  une surface triangulée. Une subdivision de  $\mathcal{M}$  est une surface triangulée  $\mathcal{M}'$  ayant même espace total que  $\mathcal{M}$  et telle que tout simplexe (un sommet, une arête ou une face) de  $\mathcal{M}'$  est contenu dans un simplexe de  $\mathcal{M}$ .

En particulier, les simplexes de  $\mathcal{M}'$  contenus dans un simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{M}$  forment une triangulation de  $\sigma$ .

**Définition 1.2.8** Deux surfaces triangulées sont dites combinatoirement équivalentes si elles admettent des subdivisions isomorphes.

Clairement, deux surfaces combinatoirement équivalentes sont homéomorphes. Le problème inverse, savoir si deux surfaces triangulées homéomorphes sont combinatoirement équivalentes, porte le nom de *Hauptvermutung*. Le *Hauptvermutung* est vrai pour les surfaces triangulées. Il est également vrai pour les variétés de dimension 3 comme démontré par Moise [Moi77] dans les années 1950.

**Proposition 1.2.9** Deux surfaces triangulées combinatoirement équivalentes ont même caractéristique.

**Preuve :** Une première preuve consiste à montrer que toute subdivision s'obtient comme une succession de subdivisions élémentaires, puis à vérifier que les subdivisions élémentaires préservent la caractéristique. On s'en tient ici à la définition générale de subdivision.

Soit  $\mathcal{M}$  une surface triangulée sans bord et  $\mathcal{M}'$  une subdivision de  $\mathcal{M}$ . D'après le lemme 1.2.6, la caractéristique  $\chi_t$  de la restriction de  $\mathcal{M}'$  à tout triangle  $t$  de  $\mathcal{M}$  vaut 1. En sommant  $\chi_t$  sur tous les triangles de  $\mathcal{M}$  on compte deux fois chaque arête ou sommet de  $\mathcal{M}'$  inclus dans l'intérieur d'une arête de  $\mathcal{M}$  et on compte un nombre de fois égal à son degré dans  $\mathcal{M}$  chaque sommet de  $\mathcal{M}'$  qui est un sommet de  $\mathcal{M}$ . On a ainsi :

$$\chi(\mathcal{M}') = \sum_{t \in \mathcal{M}} \chi_t - \chi(G') - \sum_{s \in \mathcal{M}} (d(s) - 2).$$

où  $G'$  est la restriction de  $\mathcal{M}'$  au graphe  $G$  de  $\mathcal{M}$ . Comme  $G'$  est une subdivision de  $G$  on a  $\chi(G') = \chi(G)$ . On a de plus par double énumération des incidences sommet/arête d'un graphe :  $\sum_{s \in \mathcal{M}} d(s) = 2A(\mathcal{M})$ . Et finalement

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{M}') &= \sum_{t \in \mathcal{M}} 1 - (S(G) - A(G)) - (2A(\mathcal{M}) - 2S(\mathcal{M})) \\ &= F(\mathcal{M}) - A(\mathcal{M}) + S(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

$\square$

## 1.2.2 Orientabilité et classification

Une *orientation* d'un triangle de  $\mathcal{M}$  de sommets  $u, v, w$  est le choix d'une des deux permutations cycliques  $(u, v, w)$  ou  $(u, w, v)$  (ce sont les seules!) sur ses sommets. Une orientation d'un triangle induit une orientation de ses arêtes allant d'un sommet vers son itéré dans la permutation choisie. Deux triangles adjacents ont des orientations *compatibles* s'ils induisent des orientations opposées sur leur arête commune.

Une surface triangulée est *orientable* si on peut orienter chacun de ses triangles de sorte que deux triangles adjacents quelconques aient des orientations compatibles. Il n'y a que deux manières possibles d'orienter les triangles d'une surface orientable connexe pour que cette propriété soit vérifiée. On dit qu'une surface connexe (orientable) est *orientée* si on a choisi une de ces deux orientations possibles.

**Proposition 1.2.10** *Deux surfaces combinatoirement équivalentes ont même orientabilité.*

**Preuve :** Il suffit de le vérifier pour une surface  $\mathcal{M}'$  subdivision d'une surface  $\mathcal{M}$ . Supposons  $\mathcal{M}'$  orientable et orientée. On oriente chaque triangle  $\tau$  de  $\mathcal{M}$  de la manière suivante : On considère les triangles orientés de  $\mathcal{M}'$  contenus dans  $\tau$ . Ceux-ci (avec leurs arêtes et sommets) forment une triangulation orientée  $\mathcal{T}$  de  $\tau$ . Chaque arête de  $\mathcal{T}$  située sur le bord de  $\tau$  possède une orientation induite par l'unique triangle orienté de  $\mathcal{T}$  le contenant. Il est clair que ces orientations sont cohérentes sur tout le bord de  $\tau$  (le vérifier!). On en déduit une orientation de  $\tau$ . La compatibilité de ces orientations sur les triangles de  $\mathcal{M}$  résulte immédiatement de celle sur  $\mathcal{M}'$ .

Supposons maintenant  $\mathcal{M}$  orientable et orientée. Soit  $\sigma$  un triangle de  $\mathcal{M}'$ . Ce triangle est contenu dans un unique triangle  $\tau$  de  $\mathcal{M}$ . Soit  $P$  le plan affine engendré par  $\tau$ . L'orientation de  $\tau$  induit une orientation de  $P$  qui induit à nouveau une orientation de  $\sigma$ . Reste à voir que les orientations des triangles de  $\mathcal{M}'$  ainsi construites sont compatibles. Pour cela il suffit de vérifier que pour toute arête  $a$  de  $\mathcal{M}'$  incidente à deux triangles, les orientations des triangles incidents sont compatibles. Si  $a$  est intérieure à un triangle  $\tau$  de  $\mathcal{M}$ , il en est de même des deux triangles de  $\mathcal{M}'$  incidents à  $a$ . Il est facile de vérifier que ces deux triangles se situent de part et d'autre de la droite support de  $a$  dans le plan de  $\tau$ . On en déduit la compatibilité des orientations de ces triangles. Si  $a$  est intérieure à une arête  $b$  de  $\mathcal{M}$ , on peut raisonner de la même manière après avoir 'déplié' les deux triangles de  $\mathcal{M}$  incidents à  $b$ .  $\square$

**Lemme 1.2.11** *Toute triangulation d'un disque est orientable.*

**Preuve :** Ceci résulte de la proposition 1.2.10 précédente et du Hauptvermutung puisqu'un triangle est évidemment orientable et constitue une triangulation d'un disque. Une preuve directe sans le Hauptvermutung est laissée à titre d'exercice.  $\square$

**Exercice 1.2.12** *Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation d'un disque. Montrer par récurrence sur son nombre de sommets que  $\mathcal{T}$  est une subdivision de la triangulation formée d'un seul triangle. On pourra distinguer le cas où  $\mathcal{T}$  contient des sommets intérieurs au disque ou non.*

Cette preuve montre en particulier que  $\mathcal{T}$  peut être obtenue à partir d'un triangle par une succession de subdivisions 'élémentaires'. En déduire que  $\mathcal{T}$  est orientable.

On a vu que deux surfaces triangulées combinatoirement équivalentes ont même orientabilité (lemme 1.2.10) et même caractéristique (lemme 1.2.9). Clairement elles ont également même nombre de bords. Inversement on montre (Brahana, 1922) que

**Théorème 1.2.13 (de classification des surfaces)** *Deux surfaces triangulées ayant mêmes caractéristique, orientabilité et nombre de bords sont combinatoirement équivalentes.*

Si  $\mathcal{M}$  est une surface orientable dont le bord a  $b$  composantes on appelle genre de  $\mathcal{M}$  la quantité  $g = (2 - b - \chi(\mathcal{M}))/2$ . Si  $\mathcal{M}$  est une surface non-orientable le genre est défini par  $g = 2 - b - \chi(\mathcal{M})$ . D'après le théorème de classification et le Hauptvermutung, il existe à homéomorphisme près une unique surface orientable de genre  $g$  sans bord. On note  $\mathcal{M}_g$  une triangulation de cette surface.

## 1.3 Homologie des surfaces

### 1.3.1 $H_0$

Comme pour les graphes, on pose  $H_0(\mathcal{M}) = C_0/Im\partial$ . On a de la même façon

**Proposition 1.3.1** *Soit  $\mathcal{M}$  une surface triangulée connexe, alors  $H_0(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}$ .*

### 1.3.2 $H_1$

Soit  $\mathcal{M}$  une surface triangulée. On considère les espaces vectorielles suivants :

- l'espace  $C_0$  des combinaisons linéaires formelles de sommets de  $\mathcal{M}$ ,
- l'espace  $C_1$  des combinaisons linéaires formelles d'arêtes de  $\mathcal{M}$ ,
- l'espace  $C_2$  des combinaisons linéaires formelles de triangles de  $\mathcal{M}$ .

Les éléments de  $C_i$  sont appelés des  $i$ -chaînes.

Comme pour les graphes, les arêtes sont supposées orientées. Ceci permet de définir un opérateur bord (par extension linéaire)

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1 &\rightarrow C_0 \\ a &\mapsto o(a^{-1}) - o(a) \end{aligned}$$

Une arête  $a$  se note également  $[o(a), o(a^{-1})]$ . On pose par convention d'écriture que  $[o(a^{-1}), o(a)] = -[o(a), o(a^{-1})]$ . On suppose également que chaque triangle possède une orientation par défaut. On note  $[s, t, u]$  un triangle orienté par la permutation  $(s, t, u)$ . Avec cette notation on a  $[s, t, u] = [t, u, s] = [u, s, t]$ . On définit alors un opérateur bord  $\partial_2$  (par extension linéaire) :

$$\begin{aligned} \partial_2 : C_2 &\rightarrow C_1 \\ [s, t, u] &\mapsto [t, u] - [s, u] + [s, t] = [s, t] + [t, u] + [u, s] \end{aligned}$$



L'espace des 1-cycles est défini comme pour les graphes par  $Z_1(\mathcal{M}) = \ker \partial_1$ . L'espace des 1-bords est défini par  $B_1(\mathcal{M}) = \text{Im} \partial_2$ . Deux 1-cycles sont dit *homologues* si leur différence est un bord (i.e. borde une 2-chaîne). L'espace des classes d'homologie  $H_1(\mathcal{M}) = Z_1(\mathcal{M})/B_1(\mathcal{M})$  est appelé le *premier groupe d'homologie* de  $\mathcal{M}$ . On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas des orientations choisies par défaut pour les arêtes et triangles de  $\mathcal{M}$ .

Intuitivement deux cycles sont homologues si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue autorisant les fusions et scissions de cycles, ainsi que l'ajout/suppression de cycles séparateurs.

**Lemme 1.3.2** *Le premier groupe d'homologie d'une triangulation d'un disque est nul.*

**Preuve :** Par le lemme 1.1.7, il suffit de montrer que tout cycle simple d'un disque triangulé orienté borde une 2-chaîne. Mais ceci résulte directement du théorème de Jordan qui permet de considérer la 2-chaîne constituée des triangles (orientés suivant l'orientation du disque) intérieurs à un cycle simple. Il est clair que le bord de cette 2-chaîne est, à un signe près, le cycle simple en question.  $\square$

**Proposition 1.3.3**  $H_1(\mathcal{M}_g) \simeq \mathbb{R}^{2g}$

Soit  $T^*$  un arbre couvrant du graphe d'adjacence des triangles de  $\mathcal{M}_g$ . L'ensemble des triangles de  $\mathcal{M}_g$  recollés suivant les adjacences de  $T^*$  forme donc un disque triangulé  $D$ . Chaque arête du bord de  $D$  s'identifie à une arête de  $\mathcal{M}_g$ . Inversement, chaque arête de  $\mathcal{M}_g$  apparaît soit une fois comme arête interne à  $D$  soit deux fois sur le bord de  $D$ . Soit  $G$  le sous-graphe de  $\mathcal{M}_g$  induit par les arêtes apparaissant sur le bord de  $D$ .

**Lemme 1.3.4** *Tout cycle de  $Z_1(\mathcal{M}_g)$  est homologue à un cycle dont le support est dans  $G$ , autrement dit à un cycle de  $Z_1(G)$ .*

**Preuve :** Soit  $c \in Z_1(\mathcal{M}_g)$  et  $a$  une arête du support de  $c$ . Si  $a$  est interne à  $D$  on considère un chemin  $p_a$  sur le bord de  $D$  joignant  $o(a^{-1})$  à  $o(a)$ . Par le lemme 1.3.2, le cycle  $a + p_a$  borde dans  $D$  donc dans  $\mathcal{M}_g$ . On en déduit que  $c$  est homologue à

$$c' = c - \sum_{\substack{a \in \text{support}(c), \\ a \notin G}} \alpha_a (a + p_a),$$

où  $\alpha_a$  est le coefficient de  $a$  dans  $c$ . On conclut en remarquant que  $\text{support}(c') \subset G$ .  $\square$

**Preuve de la proposition 1.3.3 :** Soit  $K$  un arbre couvrant de  $G$ . Considérons les classes d'homologie  $[c_e]$  des cycles  $c_e$  de  $G$  associés aux cordes de  $K$ . On sait par la proposition 1.1.9 que ces cycles génèrent  $Z_1(G)$ . Le lemme précédent montre que leurs classes d'homologie génèrent  $H_1(\mathcal{M}_g)$ . Montrons de plus que les  $[c_e]$  constituent une

famille libre de  $H_1(\mathcal{M}_g)$  et donc une base. Pour cela considérons une combinaison  $\sum_e \alpha_e c_e$  homologue à 0, i.e. telle que

$$\sum_e \alpha_e c_e = \partial_2 \sum_i \beta_i t_i$$

Soit  $a$  une arête interne à  $D$ . Comme aucune arête interne à  $D$  n'apparaît dans le membre de gauche de cette égalité on en déduit que, dans le membre de droite, les coefficients  $\beta_i$  et  $\beta_j$  des deux triangles incidents à  $a$  sont égaux. Par connexité de  $T^*$ , on conclut que tous les coefficients  $\beta_i$  du membre de droite sont égaux à un même coefficient  $\beta$ , d'où

$$\sum_e \alpha_e c_e = \beta \partial_2 \sum_i t_i$$

Or  $\partial_2 \sum_i t_i = 0$  car  $\mathcal{M}_g$  est orientée et fermée. Il suit que  $\sum_e \alpha_e c_e = 0$  dans  $Z_1(G)$  et donc que tous les  $\alpha_e$  sont nuls par la proposition 1.1.9.

La dimension de  $H_1(\mathcal{M}_g)$  est donc égale au nombre de cordes de  $K$  dans  $G$ . Je note  $\beta_1$  ce nombre, aussi appelé premier nombre de Betti de  $\mathcal{M}_g$ . On a

$$\begin{aligned} \beta_1 &= A(G) - A(K) = (A - A(T^*)) - (S - 1) \\ &= A - (F - 1) - (S - 1) = A - F - S + 2 = 2 - \chi(\mathcal{M}_g) = 2g \end{aligned}$$

où  $S, A$  et  $F$  sont respectivement le nombre de sommets, arêtes et triangles de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

**Remarque 1.3.5** *Si on découpe  $\mathcal{M}_g$  suivant le graphe  $G$  introduit ci-dessus on obtient un disque triangulé (et même une arborescence de triangles). Plus généralement on appelle graphe de coupe tout sous-graphe du 1-squelette de  $\mathcal{M}_g$  qui découpe  $\mathcal{M}_g$  en un disque triangulé. Clairement, on peut remplacer le graphe  $G$  dans tout ce qui suit la proposition 1.3.3 par n'importe quel graphe de coupe.*

**Exercice 1.3.6** *En s'inspirant de la preuve de la proposition 1.3.3, montrer que si  $\mathcal{M}_{g,b}$  est une surface orientable de genre  $g$  à  $b$  bords, alors  $H_1(\mathcal{M}_{g,b}) \simeq \mathbb{R}^{2g+b-1}$ . On remarquera que le bord de la 2-chaîne définie par la somme de tous les triangles (orientés) de  $\mathcal{M}_{g,b}$  est non-nul et égal à la somme des  $b$  composantes (orientées) du bord de  $\mathcal{M}_{g,b}$ . En déduire que les classes d'homologie des  $g$  cycles formés par ces composantes sont linéairement liés.*

### 1.3.3 $H_2$

On définit  $H_2(\mathcal{M})$  comme le sous-espace  $\ker \partial_2$  des cycles de  $C_2$ .

**Proposition 1.3.7** *Si  $\mathcal{M}$  est connexe, orientable et sans bord alors,  $H_2(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}$*

**Preuve :** Supposons  $\mathcal{M}$  orientée. Soit  $c$  un 2-cycle de  $\mathcal{M}$ . Les coefficients dans  $c$  de deux triangles adjacents dans  $\mathcal{M}$  sont nécessairement égaux puisque l'arête commune apparaît avec une orientation opposée dans leur bord respectif. Par connexité du graphe d'adjacence des faces on a que  $c$  est de la forme  $\alpha \sum_{t \in \mathcal{M}} t$ . Comme  $\sum_{t \in \mathcal{M}} t$  est effectivement un 2-cycle, on en déduit que  $H_2(\mathcal{M})$  est engendré par ce 2-cycle.  $\square$

**Théorème 1.3.8** *Deux surfaces combinatoirement équivalentes ont des groupes d'homologie isomorphes.*

**Preuve pour les surfaces orientables sans bord :** Ceci résulte des propositions 1.3.1, 1.3.3, 1.3.7 et du théorème de classification 1.2.13.  $\square$

La définition et les propriétés de l'homologie des surfaces triangulées s'étendent sans mal aux surfaces combinatoires. Cette fois, le bord d'une face orientée est la somme des arêtes orientées le long de son bord. Le formalisme des surfaces combinatoires permet, via la notion d'équivalence combinatoire d'exprimer plus simplement l'homologie d'une surface par passage à une surface réduite.

**Exercice 1.3.9** *Soit  $\mathcal{M}$  une surface combinatoire. Montrer que la surface  $\mathcal{M}'$  obtenue par subdivision soit d'une arête soit d'une face de  $\mathcal{M}$  a des groupes d'homologie isomorphes à ceux de  $\mathcal{M}$ . En déduire que des surfaces combinatoirement équivalentes ont des groupes d'homologie isomorphes. Montrer directement que si  $\mathcal{M}'$  est obtenue par contraction d'une arête non-boucle de  $\mathcal{M}$ , alors  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  ont des groupes d'homologie isomorphes.*

### 1.3.4 Test d'homologie

On cherche ici à déterminer si deux 1-cycles d'une surface combinatoire  $\mathcal{M}$  sont homologues. Ceci revient à tester si leur différence est un bord. On peut donc se restreindre à ce dernier test. On suppose dans ce qui suit que  $\mathcal{M}$  est représentée au moyen d'un système de rotations. On note  $\bar{g} = 2 - \chi(\mathcal{M})$  le genre d'Euler de  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 1.3.10** *Soit  $\mathcal{M}$  une surface combinatoire de genre  $g$  possédant  $n$  arêtes. Après un précalcul en temps  $O(n)$ , on peut tester si un 1-cycle  $c$  de taille  $k$  borde dans  $\mathcal{M}$  en temps  $O(g + k)$ .*

**Preuve :** Soit  $T$  un arbre couvrant du 1-squelette  $\mathcal{M}^1$  de  $\mathcal{M}$ . La contraction des arêtes de  $T$  fournit une surface  $\mathcal{M}'$  combinatoirement équivalente à  $\mathcal{M}$ . Clairement,  $\mathcal{M}'$  s'obtient en temps  $O(n)$  à partir de  $\mathcal{M}$ . L'application qui envoie toute face de  $\mathcal{M}$  sur la face correspondante de  $\mathcal{M}'$ , toute arête de  $T$  sur 0 et toute autre arête de  $\mathcal{M}$  sur sa correspondante dans  $\mathcal{M}'$  commute avec l'opérateur bord et induit un isomorphisme des homologies. En particulier,  $c$  est un bord si et seulement si sa trace  $c'$  sur  $\mathcal{M}^1 \setminus T$  est un bord dans  $\mathcal{M}'$ . Remarquons que  $c'$  a une taille au plus  $k$ . Soit  $K^*$  un arbre couvrant du graphe d'adjacence des faces de  $\mathcal{M}'$  et soit  $K$  l'ensemble des arêtes primales correspondant aux arêtes de  $K^*$ . La fusion des faces de  $\mathcal{M}'$  selon les arêtes de  $K$  fournit une surface réduite (un seul sommet et une seule face)  $\mathcal{M}''$  combinatoirement équivalente à  $\mathcal{M}'$ . Soit  $f$  l'unique face de  $\mathcal{M}''$ . Les extrémités de chaque arête orientée  $a$  de  $K$  scindent le bord de  $f$ , vu comme cycle de  $\mathcal{M}'$ , en deux sous-chemins  $d_1$  et  $d_2$ . En particulier, les cycles  $a + d_1$  et  $a + d_2$  bordent dans  $\mathcal{M}'$ . Ainsi, le cycle  $c'$  est homologue à un cycle  $c''$  obtenu en substituant à chaque occurrence d'une arête  $a$  de  $K$  (la somme des arcs de) l'un

ou l'autre des sous-chemins  $d_1$  et  $d_2$  associés. De sorte que  $c'$  est un bord dans  $\mathcal{M}'$  si et seulement si  $c''$  est un bord dans  $\mathcal{M}''$ . Comme  $f$  est l'unique face de  $\mathcal{M}''$ , cela signifie que  $c''$  est un multiple de  $\partial f$ .

Puisque  $\partial f$  est de longueur  $2\bar{g} = O(g)$ , chaque substitution d'une arête de  $c'$  induit un coût de mise à jour en  $O(g)$ . Le calcul explicite du cycle  $c''$  par substitution successive est donc  $O(gk)$ . Pour réduire ce coût à  $O(g+k)$  on procède comme suit. On note  $a_0, a_1, \dots, a_{2\bar{g}-1}$  les arcs de  $\partial f$  dans un ordre circulaire. Pour chaque arc  $a \in K$ , on note  $b(a)$  l'indice de l'arc de  $\partial f$  successeur de  $a$  autour de son origine  $o(a)$ . On note également  $e(a)$  l'indice de l'arc de  $\partial f$  successeur de  $a^{-1}$  autour de son origine  $O(a^{-1})$ . Les calculs de  $b(a)$  et  $e(a)$  peuvent aisément s'obtenir en temps  $O(n)$  dans une phase de précalcul. Notons que chaque arc  $a$  de  $K$  est homologue au sous-chemin  $\partial f(a)$  compris entre les arcs  $a_{b(a)}$  et  $a_{e(a)-1}$  de  $\partial f$  dans le sens croissant des indices modulo  $2\bar{g}$ . On considère un tableau  $D$  de taille  $2\bar{g}$  constitué d'incréments différentiels. Initialement  $D[i] = 0$  pour tout  $i$ . Pour chaque arc  $a$  de  $c'$ , on incrémente  $D[b(a)]$  si  $b(a) \neq 0$  et on décrémente  $D[e(a)]$  si  $e(a) \neq 0$ . On calcule ensuite  $D[0]$  comme le nombre d'arcs  $a$  de  $c'$  tels que  $a_0 \in \partial f(a)$ . On vérifie aisément que  $c'' = \sum_i \gamma_i a_i$ , où  $\gamma_0 = D[0]$  et  $\gamma_i$  est défini récursivement par  $\gamma_i = \gamma_{i-1} + D[i]$ . Il reste finalement à exprimer chaque arc  $a_i$  comme  $\pm$  l'arête (orientée par défaut) correspondante pour obtenir l'expression de  $c''$  sur la base des cycles de  $\mathcal{M}''$  donnée par ses arêtes. Le calcul de  $D$  prend un temps  $O(g+k)$  et on en déduit l'expression de  $c''$  dans le même temps. Il ne reste plus qu'à tester en temps  $O(g)$  si cette expression est un multiple de l'expression de  $\partial f$  sur la même base (soit 0 pour une surface orientable).  $\square$