

Chapitre 6

Raccord continu de surfaces

6.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous évoquons la troisième étape de la construction du modèle de surface que nous proposons : le raccord continu de surfaces (figure 6.1).

Après avoir évoqué les diverses méthodes existantes, nous en proposons une qui est fondée sur la combinaison convexe des primitives : cette méthode est naturellement associée à la représentation d'une surface par un atlas de cartes. Nous avons présenté cette méthode dans le recueil *Curve and Surface Design, Saint-Malo'99* [GAM99]. Cependant, nous mettons en évidence que d'autres méthodes telles que le patch de Gregory, ou même l'interpolation de Bézier peuvent être réécrites comme des raccords par combinaison convexe.

Enfin, nous observons qu'un tel raccord s'appuyant sur les domaines définis dans le chapitre précédent et appliqué aux primitives définies dans le chapitre ??, forme une surface régulière \mathcal{S} : il s'agit de la surface que nous modélisons.

6.2 Méthodes existantes

Raccorder des surfaces est un problème courant en “design” des surfaces. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe ?? on ne peut dessiner toute surface avec des morceaux de surface rectangulaires qui ne partagent chacun de leurs sommets qu'avec trois autres morceaux. Si l'on décide de n'utiliser que des morceaux de B-splines, on doit alors dessiner des morceaux de surfaces à n côtés pour combler quelques trous. D'autre part, bien des modeleurs de CAO utilisent un ensemble réduit de primitives (quadriques, tores ...) et nécessitent le recours à des raccords entre ces primitives.

Demander que ces raccords soient continus est assez naturel. On peut le souhaiter pour des raisons de conception, des raisons mécaniques ou même esthétiques : certains procédés tels que l'extrusion, sont incompatibles avec la présence de coins ou d'arêtes.

Nous proposons donc un aperçu des différentes techniques envisagées pour raccorder des surfaces. Elles peuvent suivre deux types de philosophie : la transition douce entre deux surfaces qui s'intersectent ou le joint entre deux ou plusieurs surfaces sans intersection.

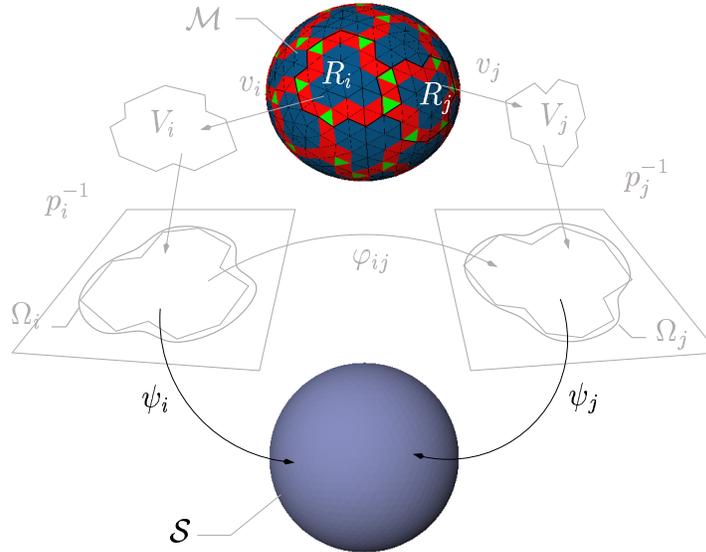


FIG. 6.1 – Troisième étape de la construction de notre modèle : le raccord continu des primitives en une surface \mathcal{S}

Mais elle se classent avant tout selon la nature implicite ou paramétrique des surfaces à raccorder et que l'on appelle primitives.

6.2.1 Surfaces implicites

Les méthodes développées pour raccorder des primitives implicites peuvent être classées en trois familles : celles qui définissent une surface par son équation implicite, celles qui prolongent les primitives et enfin celles qui utilisent une définition constructive.

Wu et Zhou [WZ00] définissent une surface implicite qui en raccorde n autres qui sont de degré deux, en des courbes définies comme l'intersection de chaque primitive avec un plan. L'équation de cette surface implicite est établie en résolvant un système linéaire de grande taille qu'ils simplifient en réduisant le champ d'investigation des solutions.

Hoffmann et Hopcroft [HH86, HH87] établissent l'équation $F(x, y, z) = 0$ de la surface de raccord entre deux primitives d'équations $G(x, y, z) = 0$ et $H(x, y, z) = 0$ en choisissant F dans l'idéal généré par les deux polynômes G et H : $F = AG + BH$. Cette méthode est appelée méthode du potentiel.

Enfin, on peut préférer construire le raccord plutôt que de chercher à le définir par des méthodes qui peuvent être instables numériquement. Parmi ces méthodes constructives, nommons le raccord par une surface de congé [RO87]. Cette méthode a la particularité de pouvoir être utilisée pour raccorder des primitives implicites comme paramétriques. Nous la développerons donc dans le paragraphe suivant.

6.2.2 Surfaces paramétriques

Dans le cas de primitives paramétriques, il s'agit de décrire un morceau de surface qui se raccorde à deux ou n surfaces le long de lignes connues. Comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe ?? le passage entre les paramétrisations des différents morceaux doit être C^1 à une composition près.

6.2.2.1 Deux surfaces

La définition d'un raccord entre deux primitives paramétriques peut se faire de trois façons différentes.

Tout d'abord, on peut définir un morceau de cyclide reliant deux quadriques qui s'intersectent [AD97]. La cyclide rejoint chaque quadrique le long d'une de ses lignes de courbure.

L'équation de la surface de raccord peut également être la solution d'équations aux dérivées partielles contraintes par l'interpolation des deux lignes à joindre [BW89]. La surface obtenue est géométriquement belle mais la résolution peut être longue et non explicite : l'équation n'est pas connue, seule sa trace dans l'espace est approchée.

Enfin, comme pour les surfaces implicites, on peut utiliser une surface de congé. Dans sa version la plus simple, il faut imaginer une boule qui roule tangentiellement aux deux surfaces. La surface de raccord est alors définie par la trace de ce déplacement entre les deux lignes de contact de la boule avec les primitives. Cette méthode a été introduite par Rossignac et Requicha [RR84]. Le principal problème à résoudre est la définition de la ligne sur laquelle se déplace la boule. Elle est généralement définie comme l'intersection des offsets des deux primitives (l'offset d'une surface S est la surface définie comme l'ensemble des points $x + c\vec{n}$ où x est un point de S , c est une constante et \vec{n} est la normale à S en x). A l'inverse on peut préférer décider du tracé des deux lignes de contact et en déduire le profil variable qui va relier les points des deux lignes. Dans ce cas, les lignes sont des interpolations de points effectuées dans l'espace des paramètres de chaque primitive afin de s'assurer que la ligne appartienne à la primitive [Fil89]. Enfin, on peut souhaiter utiliser une boule mais à rayon variable [CH97].

6.2.2.2 n surfaces

Lorsque l'on a plus de deux primitives à relier et qu'elles forment un trou à n côtés, on peut utiliser une des techniques présentées dans le paragraphe précédent de manière récursive. Mais d'autres méthodes sont plus efficaces. Il s'agit de définir la paramétrisation de la surface de raccord sur un polygone à n côtés [Mal99].

On peut subdiviser ce domaine de paramétrisation. Parmi ces méthodes, l'une des plus fameuses consiste à subdiviser le domaine de façon récursive en utilisant dans chaque sous-domaine une primitive plane. Cela revient à couper les arêtes et les coins d'un polyèdre récursivement jusqu'à arriver à une surface limite qui soit lisse. Ce sont les méthodes de subdivision de maillage déjà rencontrées dans le paragraphe ?? [Sab83, Sab96]. Prautzsch [Pra93] propose de subdiviser récursivement un domaine de paramétrisation rectangulaire afin de définir un raccord C^r par morceaux de produits tensoriels de polynômes. On peut

au contraire ne subdiviser le domaine qu'une fois en sous-domaines triangulaires ou rectangulaires pour lesquels on sait créer des morceaux de surface convenables telles que des B-splines (cela revient à autoriser des sommets à valence non égale à quatre).

Une autre famille de méthodes consiste à définir une seule équation sur le domaine de paramétrisation. Pour cela on peut définir l'équation à la manière des B-splines, c'est-à-dire comme une somme de points de contrôle (les sommets du trou) multipliés par des fonctions décroissantes de 1 à 0 dans le domaine polygonal [Var91]. On peut aussi préférer définir l'équation comme la somme pondérée de morceaux qui se raccordent convenablement à deux arêtes consécutives du trou [GLH93]. L'équation est alors donnée par une fonction rationnelle.

6.3 Par combinaison convexe à l'aide d'un atlas

6.3.1 Principe

Nous proposons une méthode de raccord de régions qui peut être vue comme une généralisation de la méthode de Gregory. Elle est fondée sur la représentation des surfaces par un atlas de cartes présentée dans le chapitre ?? et consiste à mélanger des morceaux de primitives entre eux par combinaison convexe. Pour cela il faut définir la mise en correspondance des points des primitives à mélanger, ainsi que les poids de la combinaison convexe (figure 6.2). Nous avons utilisé une telle méthode lors de l'approximation d'une couronne pour approcher la frontière intérieure par une boucle continue (voir section ??).

Supposons que les primitives à raccorder soient paramétrées par des fonctions p_i sur des domaines Ω_i . Notons Ω_{ij} la partie de Ω_i et Ω_{ji} celle de Ω_j qu'il faut mélanger. Supposons avoir défini un C^1 -difféomorphisme φ_{ij} de Ω_{ij} dans Ω_{ji} . Les domaines Ω_i et les fonctions de transition φ_{ij} constituent alors l'architecture d'une variété de dimension 2 sur laquelle on définit une partition de l'unité (voir paragraphe ??) : sur chaque Ω_i est définie une fonction α_i de classe C^1 , égale à 1 aux points de Ω_i qui n'appartiennent à aucun Ω_{ij} (on appelle ces points la zone pure de Ω_i), et égale à 0 à la frontière de Ω_i . Notons \mathcal{I} l'ensemble des parties de \mathcal{I} et, pour tout i nous définissons l'application qui à tout point m de Ω_i associe l'ensemble des indices j des régions différentes de R_i et auxquelles m appartient.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i : \Omega_i &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I}) \\ m &\mapsto \{j \in \mathcal{I} : m \in \Omega_{ij}\} \end{aligned}$$

Les fonctions α_i constituant une partition de l'unité, nous avons

Propriété 1

- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, 0 \leq \alpha_i(m) \leq 1$
- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) = 1$

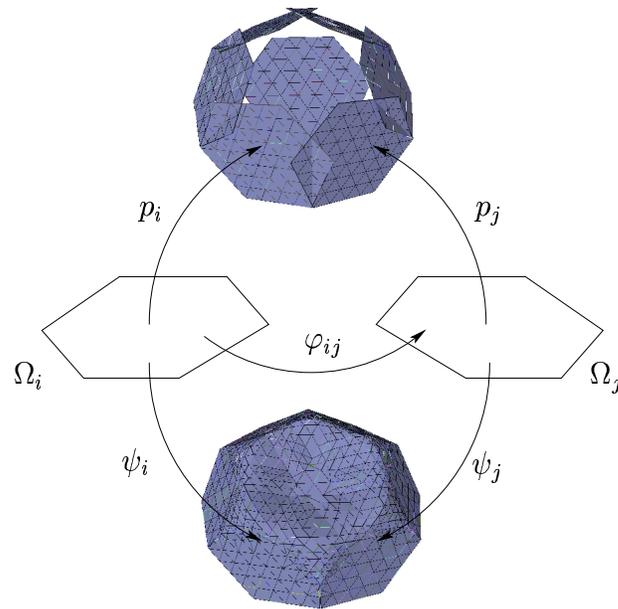


FIG. 6.2 – Raccord de primitives par combinaison convexe s'appuyant sur la structure d'un atlas.

Nous immergeons alors cette variété de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 en définissant sur chaque domaine Ω_i une paramétrisation locale ψ_i par

$$\begin{aligned} \psi_i : \Omega_i &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ m &\mapsto \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) p_j(\varphi_{ij}(m)) \end{aligned}$$

Cette surface quasi-régulière (voir chapitre ??) constitue alors bien un raccord continu des zones pures des primitives.

REMARQUE —

On peut faire deux reproches à cette méthode. D'une part, on ne peut assurer que la quasi-régularité de la surface (voir section ??). D'autre part, du fait qu'elle soit immergée et non plongée dans \mathbb{R}^3 , la surface peut admettre des auto-intersections.

Mais d'une part, la grande majorité des méthodes n'assure pas non plus l'absence de singularités. D'autre part, il peut être intéressant d'avoir un modèle qui permettent des auto-intersections : tout le problème consiste à les maîtriser.

Enfin, Mitchell [Mit00] a montré que toute méthode de raccord de droites ou de surfaces admettait des points singuliers ou des auto-intersections pour certaines primitives à raccorder.

6.3.2 Exemples

Il est intéressant de remarquer que cette formulation de raccord de droites ou de surfaces englobe bon nombre d'objets connus parmi lesquels les morceaux à n côtés définis comme la somme convexe de prolongements locaux, ou encore les courbes de Bézier.

6.3.2.1 Le patch à n côtés donné par une équation

Pour illustrer notre propos, nous proposons une relecture de la définition du raccord de n surfaces par la méthode de Gregory selon les termes de la méthode que nous proposons.

Il faut donc identifier dans la méthode de Gregory quels sont les domaines Ω_i , Ω_{ij} , les fonctions de transition φ_{ij} , les fonctions α_i définissant un partitionnement de l'unité et enfin s'assurer que les fonctions ψ_i sont bien celles utilisées pour définir le raccord.

Dans son article de 1993 [GLH93], Gregory traite le cas où les primitives sont des bandelettes rectangulaires disposées selon la figure 6.3. Chaque bandelette est une B-spline paramétrée par q_j sur le rectangle $\delta = [0; 2] \times [-1; 0]$ de \mathbb{R} . Pour chaque couple de bandelettes successives, une extension notée $q_{j-1,j}$ est définie sur l'union du carré $[0; 1] \times [0; 1]$ avec les domaines des deux bandelettes ramenés aux rectangles $[0; 2] \times [-1; 0]$ et $[-1; 0] \times [-1; 1]$. Une fonction $\Phi_{j-1,j}$ transforme tous les points d'un polygone régulier à n cotés noté Ω , en des points du carré $[0; 1] \times [0; 1]$. L'union de $[0; 2] \times [-1; 0]$, $[-1; 0] \times [-1; 1]$ et $\Phi_{j-1,j}(\Omega)$ constitue un domaine Ω_j et $\Phi_{j-1,j}(\Omega)$ peut être interprété comme la partie $\Omega_{j-1,j}$ mais aussi la partie $\Omega_{j,j+1}$. L'équivalent de la fonction de transition φ_{ij} serait alors la composition $\Phi_{j-1,j} \circ \Phi_{i-1,i}^{-1}$.

Gregory définit la paramétrisation de sa surface de raccord sur le polygone Ω par

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j(X) p_{j-1,j}(X)$$

où w_j est une fonction de poids satisfaisant la propriété 1, page 138, et $p_{j-1,j}(X) = q_{j-1,j} \circ \Phi_{j-1,j}(X)$. On peut donc bel et bien réécrire cette paramétrisation en

$$\psi_i(m) = \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) p_j(\varphi_{ij}(m))$$

avec $m \in \Omega_i$, $\alpha_j = w_j \circ \Phi_{j-1,j}^{-1}$, et $p_j = p_{j-1,j} \circ \Phi_{j-1,j}^{-1} = q_{j-1,j}$.

6.3.2.2 L'interpolation de Bézier

Le problème du raccord de surfaces ou de droites peut être interprété comme un problème d'interpolation. En particulier, l'interpolation par une courbe de Bézier (partie ??) de deux points P_0, P_3 selon les directions de tangences déterminées par deux autres

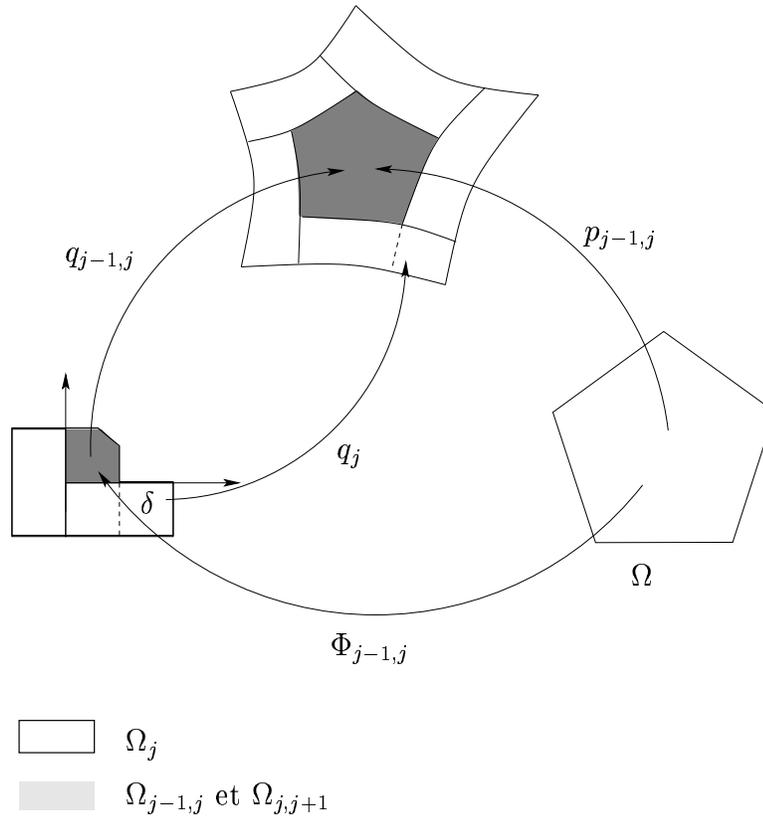


FIG. 6.3 – Le patch de Gregory est un raccord par combinaison convexe s'appuyant sur une structure d'atlas

points comme $P_0\vec{P}_1$ et $P_2\vec{P}_3$ est également le raccord continu des deux segments $[P_0P_1]$ et $[P_2P_3]$ dont les zones pures sont réduites aux points P_0 et P_3 .

Rappelons que la paramétrisation de la courbe d'interpolation de Bézier s'écrit

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t)$$

avec $t \in [0; 1]$ et $B_i(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$.

On considère les deux domaines $\Omega_0 = [0; 1]$ et $\Omega_1 = [-1; 0]$. On y définit les deux fonctions de transition $\varphi_{01}(u) = u - 1$ et $\varphi_{10}(v) = v + 1$ ainsi que les fonctions définissant une partition de l'unité $\alpha_0(u) = (1-u)^2(1+2u)$ et $\alpha_1(v) = (1+v)^2(1-2v)$. Enfin nous y définissons les paramétrisations des deux segments par les fonctions suivantes $P_0(u) = P_0 + \frac{3u}{2u+1}(P_1 - P_0)$ et $P_1(v) = P_2 + \frac{1+v}{1-2v}(P_3 - P_2)$. On définit alors le raccord des deux segments par les deux paramétrisations cohérentes suivantes

$$\begin{aligned} \psi_0(u) &= \alpha_0(u)P_0(u) + \alpha_1(\varphi_{01}(u))P_1(\varphi_{01}(u)) \\ \psi_1(v) &= \alpha_0(\varphi_{10}(v))P_0(\varphi_{10}(v)) + \alpha_1(v)P_1(v) \end{aligned}$$

En notant $t = u$ et $t = v + 1$ on a alors bien

$$P(t) = \psi_0(u) = \psi_1(v)$$

avec $t \in]0; 1[$.

6.4 Application à la construction d'un atlas

Pour définir l'atlas d'une surface \mathcal{S} qui approche un maillage \mathcal{M} donné, nous avons d'ores et déjà construit des domaines du plan Ω_i liés entre eux par des fonctions de transition φ_{ij} qui sont des C^1 -difféomorphismes.

Nous avons également défini les primitives planes $p_i(\Omega_i)$ qui approchent \mathcal{M} .

De plus nous avons défini dans le chapitre précédent des fonctions α_i sur chaque domaine Ω_i satisfaisant la propriété 1.

Finalement, nous définissons \mathcal{S} comme le raccord continu des primitives planes par combinaison convexe dont les poids sont les fonctions α_i . Elle est donc décrite localement par les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \psi_i & : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ m & \mapsto \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) p_j(\varphi_{ij}(m)) \end{aligned}$$

Les fonctions de transition sont des C^1 -difféomorphismes. Les fonctions α_i et p_i sont de classe C^1 . Donc ψ_i est de classe C^1 .

Pour que \mathcal{S} soit régulière, il faudrait alors vérifier que φ_i est bijective. Nous ne pouvons conclure qu'en la quasi-régularité de \mathcal{S} , et observer les résultats qu'une telle méthode donne en pratique.

Terminons ce chapitre en illustrant le raccord par combinaison convexe avec des maillages dont les sommets appartiennent à la surface \mathcal{S} qui approche la triangulation \mathcal{M} d'une sphère (figure 6.4). Le recouvrement de \mathcal{M} est celui constitué des régions initiales de l'algorithme de division-fusion. A la droite du maillage \mathcal{M} , nous présentons une première triangulation de \mathcal{S} puis sa subdivisée. Nous soulignons le fait qu'aucun traitement n'a été appliqué à ces triangulations et que des pivotages d'arêtes ou d'autres choix de points permettraient une bien meilleure visualisation de \mathcal{S} .

6.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons évoqué le problème de raccord continu de surfaces. Après avoir parcouru les diverses solutions existantes, nous avons proposé le raccord par combinaison convexe, particulièrement bien adapté à la représentation par un atlas de



FIG. 6.4 – Maillage \mathcal{M} et triangulations dont les sommets appartiennent à la surface \mathcal{S} issue de notre modèle et construite par combinaison convexe des primitives approchant les régions du recouvrement initial de l'algorithme de division-fusion.

cartes. Ce raccord était déjà présent indirectement dans la littérature par le *patch* de Gregory ou encore l'interpolation de Bézier. Enfin, ce raccord conclut la construction du modèle de surface que nous proposons dans ce mémoire.

Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons proposé des solutions originales à des problèmes géométriques soulevés lors de la construction d'un modèle de surface fondé sur la représentation par un atlas de cartes. Ce modèle produit une surface quasi-régulière (peut-être même régulière) à partir de données 3D ayant été interpolées au préalable par un maillage triangulaire. Parmi les résultats originaux qui sont proposés dans cette partie, nous avons en particulier démontré que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire, nous avons étudié la paramétrisation d'une couronne du plan par un C^1 -difféomorphisme, et enfin nous avons étudié le raccord continu de surfaces par combinaison convexe.

Bibliographie

- [AD97] S. Allen and D. Dutta. Cycloids in pure blending. *Computer Aided Geometric Design*, 14 :51–102, 1997.
- [BW89] M. I. G. Bloor and M. J. Wilson. Generating blend surfaces using partial differential equations. *Computer Aided Design*, 21(3) :165–171, 1989.
- [CH97] J. H. Chuang and W. C. Hwang. Variable-radius blending by constraint spine generation. *Visual Computer*, 13 :316–329, 1997.
- [Fil89] B. J. Filip. Blending parametric surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 8(3) :165–173, 1989.
- [GAM99] C. G erot, D. Attali, and A. Montanvert. From local approximation to a g^1 global representation. In P. J. Laurent, P. Sablonni ere, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design*, pages 109–118, Saint-Malo, 1999. Vanderbilt University Press Nashville TN.
- [GLH93] J. A. Gregory, V. K. H. Lau, and J. M. Hahn. High order continuous polygonal patches. In H. Hagen, G. Farin, and H. Noltemeier, editors, *Geometric Modelling*, pages 117–132. Springer Verlag, 1993.
- [HH86] C. Hoffmann and J. Hopcroft. Quadratic blending surfaces. *Computer Aided Design*, 18(6) :301–306, 1986.
- [HH87] C. Hoffmann and J. Hopcroft. The potential method for blending surfaces and corners. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling : algorithms and new trends*, pages 347–365. SIAM, 1987.
- [Mal99] P. Malraison. n -sided surfaces : a survey. In P. J. Laurent, P. Sablonni ere, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design*, pages 247–255, Saint-Malo, 1999. Vanderbilt University Press Nashville TN.
- [Mit00] J. Mitchell. Topological obstructions to blending algorithmes. *Computer-Aided Geometric Design*, 17 :673–694, 2000.
- [Pra93] H. Prautzsch. Algorithmic blending. *J. Approx. Theory*, 72 :87–102, 1993.
- [RO87] A. P. Rockwood and J. C. Owen. Blending surfaces in solid modeling. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling : algorithms and new trends*, pages 367–383. SIAM, 1987.

- [RR84] J. Rossignac and A. Requicha. Constant-radius blending in solid modelling. *Computers in Mech. Engr.*, 3 :65–73, 1984.
- [Sab83] M. Sabin. Non-rectangular surface patches suitable for inclusion in a b-spline surface. In *Proceedings Eurographics'83*, pages 57–70, 1983.
- [Sab96] M. Sabin. Transfinite surface interpolation. In *Mathematics of Surfaces VI*, pages 517–534, Clarendon, 1996.
- [Var91] T. Varady. Overlap patches : a new scheme for interpolating curve networks with n -sided regions. *Computer-Aided Geometric Design*, 8 :7–27, 1991.
- [WZ00] T. Wu and Y. Zhou. On blending of several quadratic algebraic surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :759–766, 2000.