

# Chapitre 4

## Recouvrement d'une surface triangulée

### 4.1 Introduction

La première étape de la construction du modèle de surfaces fondé sur la représentation de surfaces par cartes est l'approximation du maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  par des morceaux de plans nommés primitives (figure 4.1). Pour cela nous proposons de définir un recouvrement de  $\mathcal{M}$  par des régions, chaque région étant bien approchée par un plan. De plus les régions doivent se recouvrir selon de bonnes propriétés, appropriées à l'utilisation que nous en faisons dans le cadre de la construction de notre modèle de surfaces. Nous parlerons de *recouvrement bien formé*.

Après avoir mis en évidence quelques similitudes entre analyse d'images et modélisation géométrique, nous choisissons d'adapter l'algorithme de division-fusion connu pour la segmentation d'une image à la définition d'un recouvrement. Cet algorithme utilise la notion de dual. Ainsi, après avoir défini un recouvrement bien formé, nous démontrons que son nerf (son dual) est une triangulation combinatoire. Nous établissons ensuite des conditions suffisantes sur le nerf pour, qu'après fusion de certaines de ces régions, le recouvrement reste bien formé. A partir de ces conditions, nous présentons alors un algorithme de définition d'un recouvrement bien formé sur le maillage  $\mathcal{M}$ . Enfin, nous appliquons cette définition à la construction de notre modèle de surfaces.

#### 4.1.1 Analyse d'images et modélisation géométrique : des domaines cousins

Les travaux d'analyse d'images et de modélisation géométrique sont parfois très proches. Cela n'est pas surprenant car tous deux traitent d'objets topologiques dont chaque élément porte des informations. Ces informations peuvent être géométriques ou non. En effet, une image est un ensemble de pixels sur lequel on peut définir une notion de voisinage (figure 4.2). De plus, chaque pixel porte une information géométrique (les coordonnées de sa

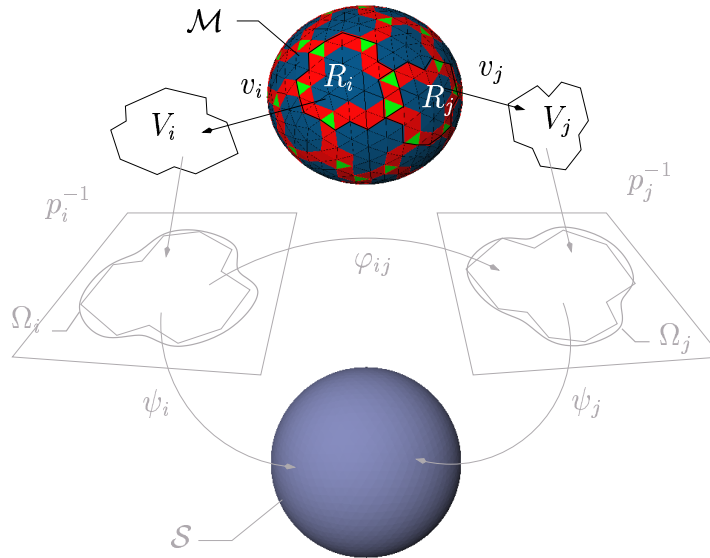


FIG. 4.1 – Première étape de la construction de notre modèle : l'approximation de  $\mathcal{M}$  par des primitives planes

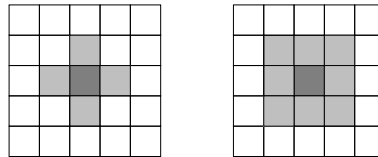


FIG. 4.2 – Relations de voisinage définies sur des pixels. En gris sombre, le pixel concerné, en gris clair ses voisins. A gauche, le voisinage est défini selon la 4-connectivité, à droite selon la 8-connectivité

position et sa taille) et une information non géométrique (une valeur de niveau de gris par exemple). De même, un maillage triangulaire est, comme nous l'avons présenté dans la section ??, un ensemble d'éléments (sommets, arêtes et faces) liés par des notions de voisinage (deux éléments sont incidents si l'un est contenu dans l'autre et adjacents s'ils partagent un même sous-élément) et portant une information géométrique (les coordonnées des sommets) et, optionnellement, une information non-géométrique (une texture par exemple).

Parmi ces travaux figure la recherche d'une famille de régions, chacune d'entre elles étant un ensemble connexe d'éléments d'un objet topologique (dans un ensemble connexe, tout élément est voisin d'au moins un autre). De plus, ces éléments doivent partager une propriété concernant l'information géométrique ou non-géométrique qu'ils portent. Parmi les exemples où cette propriété porte sur une information géométrique, citons la définition de régions sur une surface afin de l'analyser en en extrayant des primitives significatives [BM97, Cha00]. On peut également définir des régions sur une surface afin de synthétiser une nouvelle surface approchante [EDD<sup>+</sup>95, GH95, CP00a]. La propriété

est non-géométrique lorsqu'on analyse une image en la segmentant [CP95] ou lorsqu'on simplifie un maillage selon des propriétés de couleur ou de texture [GH98] (lorsque l'on simplifie un maillage, on remplace un ensemble connexe d'éléments par un seul. Simplifier un maillage nécessite donc indirectement de définir des régions connexes d'éléments). Analyse d'images et modélisation géométrique se lient même intimement lorsque l'on interprète une image de niveaux de gris ou de profondeur comme la discrétisation d'une surface définie comme le graphe d'une fonction (voir le paragraphe ??), autrement dit comme un champ continu d'altitude [BJ88].

### 4.1.2 Méthodes existantes : pourquoi la division-fusion nous semble la plus adaptée

Parmi les différentes familles de régions que l'on peut définir, deux sont remarquables : la partition et le recouvrement.

**Définition 1 (Partition)** *Une partition d'un espace topologique  $E$  est une famille de régions  $\{A_i\}_{i \in I}$  de  $E$  telles que*

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$  ;
- $\forall (i, j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Définition 2 (Recouvrement)** *Un recouvrement d'un espace topologique  $E$  est une famille  $\{U_i\}_{i \in I}$  de régions de  $E$  telles que*

- $\bigcup_{i \in I} U_i = E$ .

**Définition 3 (Recouvrement ouvert)** *Un recouvrement ouvert est un recouvrement dont les éléments sont des ouverts.*

Peu de solutions ont été proposées pour construire un recouvrement. Lorsqu'un recouvrement est construit, on demande généralement à ce que ses régions se superposent selon certaines propriétés. Il est alors délicat de proposer une construction automatique. Soit les méthodes développées laissent alors le soin à l'utilisateur de dessiner manuellement les régions sur la surface [PFH00], soit elles sont très contraintes. Pour généraliser les B-splines à des polyèdres de contrôle quelconques (c'est-à-dire dont les sommets ne sont pas tous de valence égale à quatre), Grimm et Hughes [GH95] définissent une région par élément du polyèdre (sommet, arête et face) tout en contrôlant de façon prédéfinie leur recouvrement. Cotrina et Pla [CP00b, CP00a] appliquent quant à eux un premier raffinement de type Catmull-Clark [CC78] au polyèdre de contrôle afin d'isoler les irrégularités du maillage (les sommets de valence non égale à quatre). Une région par sommet est alors définie comme un ensemble, centré sur celui-ci, de faces d'arêtes et de sommets (selon la taille désirée des pièces, elles peuvent au contraire être centrées sur les faces). Ils définissent ainsi moins de pièces et de taille plus importante. Le recouvrement que nous construisons impose également quelques contraintes sur la manière dont les régions se superposent, mais elles peuvent être vérifiées automatiquement et rapidement. Nous ne pouvons donc pas nous satisfaire de méthodes aussi rigides.

Au contraire, des solutions nombreuses et efficaces, issues de l'analyse d'images, existent lorsqu'il s'agit de définir une partition (dans certains cas tel que le plaquage de texture, des solutions contraintes sont tout de même nécessaires [MYV93]). Observons donc quelles sont celles qui sont les plus facilement adaptables à la définition d'un recouvrement.

Les méthodes de partitionnement peuvent être classées en deux familles : les approches de type contours et les approches de type régions. Les premières consistent à construire les contours des régions que l'on cherche à définir. Dans le domaine de la modélisation géométrique, on peut ainsi construire des géodésiques reliant des couples de points disposés sur la surface, comme le fait Pedersen [Ped95] pour récupérer région par région la texture issue de la décoration d'une surface implicite. Ces approches sont fondées sur la recherche de discontinuités caractérisant la frontière qui sépare deux régions "homogènes". Elles semblent donc incompatibles avec la construction de régions qui se superposent.

Les approches de type régions, sont complémentaires : elles regroupent des éléments "homogènes". Parmi elles, les méthodes markoviennes aboutissent à l'attribution d'une étiquette à chaque élément de l'objet à segmenter : cet objet ainsi que l'ensemble des étiquettes (à valeurs prises dans une famille prédéterminée), sont considérés comme la réalisation de champs de Markov, l'ensemble markovien des étiquettes étant à estimer sachant la réalisation de l'objet. Elles semblent donc peu appropriées à une généralisation aux régions superposées, surtout que la superposition que nous envisageons doit respecter quelques règles tant sur la forme même des régions que sur celle de leurs intersections. C'est pourquoi les méthodes structurales nous semblent plus indiquées pour une telle généralisation. La plus utilisée est la croissance de régions. Elle consiste à choisir quelques éléments (les germes) auxquels on agrège progressivement les éléments voisins, faisant ainsi croître les régions jusqu'à ce qu'elles recouvrent la totalité de l'objet. De nouveaux germes peuvent être introduits en cours de processus. Dans le domaine de la modélisation géométrique, Bricault et Monga [BM97] font croître les régions par agrégation de pixels 3D afin de partitionner l'ensemble de pixels en régions bien approchées par des quadriques. Eck et *al.* [EDD<sup>+</sup>95] utilisent aussi une telle méthode sur un maillage triangulaire en agrégeant des faces afin de définir un pseudo-diagramme de Voronoï. Ces méthodes nous semblent encore trop peu orientées sur la relation de voisinage qui doit lier les régions. Nous leur préférons les méthodes de division-fusion qui sont guidées par le dual de la partition : le graphe d'adjacence. La première étape de ces méthodes (la division) est une segmentation de l'ensemble des éléments en des petites régions liées par des relations de voisinage (le partage d'une arête par exemple). Ces relations permettent la définition d'un graphe d'adjacence constitué de sommets, chaque sommet symbolisant une région, et d'arêtes reliant deux sommets correspondant à deux régions voisines. Cette première étape constitue une initialisation de la définition des régions. La deuxième étape (la fusion) est l'agrégation de régions voisines, ce qui se traduit par la simplification du graphe d'adjacence. Ces méthodes s'adaptent alors naturellement à des approches pyramidales [MR91].

La généralisation de la méthode de division-fusion à la définition de régions superposées consiste alors à définir la relation de voisinage qui caractérise une superposition correcte, dans un sens à définir, de deux régions. Nous appellerons une famille de régions se super-

posant correctement et recouvrant l'objet un recouvrement *bien formé*. A ce recouvrement correspond un dual (à définir lui aussi). Il suffit alors de définir un premier recouvrement bien formé, puis de simplifier le dual correspondant de telle sorte qu'il caractérise toujours un recouvrement bien formé de l'objet. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

## 4.2 Recouvrement bien formé

On considère un objet topologique  $\mathcal{M}$  connexe et compact, également variété de dimension 2. Nous caractérisons dans cette section des recouvrements particuliers de  $\mathcal{M}$  : les recouvrements bien formés. Les propriétés de ces recouvrements sont définies d'une part pour l'application que nous faisons de tels recouvrements dans le cadre de la construction d'un atlas, et d'autre part pour faciliter leur construction. Nous proposons dans la section suivante une construction de recouvrement qui est déduite de l'algorithme de "division - fusion" utilisé pour le partitionnement, et basée sur l'utilisation d'un dual de la partition. Nous définissons dans cette section le dual d'un recouvrement et démontrons que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire.

Dans cette section,  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  désigne un recouvrement de  $\mathcal{M}$ , et

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

est le disque unité ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Nous notons  $\overline{R}$  l'adhérence de  $R$ , autrement dit le plus petit fermé contenant  $R$ .

### 4.2.1 Définition

Nous définissons dans ce paragraphe un recouvrement bien formé. Pour cela, nous commençons par quelques définitions illustrées par les figures 4.3 et 4.4, puis nous exposons les qualités que possède un tel recouvrement pour la construction d'un atlas.

**Définition 4 (Zone pure)** *La zone pure de la région  $R_i$ , notée  $zp(R_i)$ , est l'ensemble des points de  $R_i$  n'appartenant à aucune autre région  $R_j$ .*

**Définition 5 (Régions voisines)** *Deux régions  $R_i$  et  $R_j$  sont voisines si et seulement si  $R_i \cap R_j$  est non vide.*

**Définition 6 (Intersection conforme)** *Deux régions voisines  $R_i$  et  $R_j$  ont une intersection conforme si et seulement si  $R_i \cap R_j$ ,  $R_i \setminus \overline{R_j}$  et  $R_j \setminus \overline{R_i}$  sont homéomorphes à  $D$ .*

**Définition 7 (Recouvrement bien formé)** *On dit que le recouvrement  $\mathcal{R}$  est bien formé s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. *chaque région est homéomorphe à  $D$ ,*

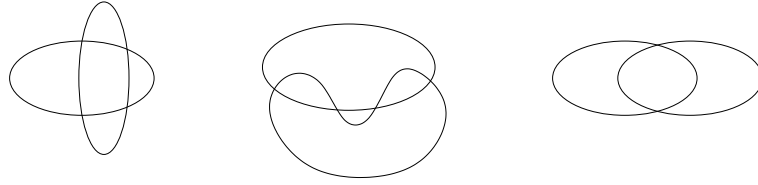


FIG. 4.3 – Exemples de régions voisines. Seules les régions de droite ont une intersection conforme.

2. deux régions voisines ont une intersection conforme,
3. la zone pure de toute région est un fermé connexe non vide,
4. tout point appartient à au moins une et au plus trois régions,
5.  $\mathcal{R}$  contient au moins quatre régions et au plus un nombre fini.

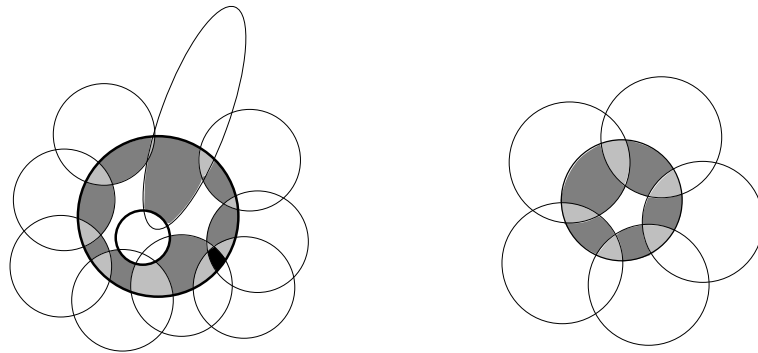


FIG. 4.4 – Exemples de recouvrements. Nous avons coloré dans la région centrale les parties où deux (gris foncé), trois (gris clair) ou quatre (noir) régions se superposent. Seul le recouvrement de droite est bien formé.

**Qualités d'un recouvrement bien formé pour la construction d'un atlas** Nous choisissons une telle définition pour des raisons propres à la construction d'un recouvrement et que l'on exposera dans les paragraphes suivants, mais aussi pour les traitements que l'on souhaite conduire sur les régions  $R_i$ . L'objet topologique  $\mathcal{M}$  que nous considérerons est une variété de dimension 2 dont nous construirons un atlas (voir chapitre ??). Chaque région  $R_i$  sera un domaine de cet atlas auquel sera associé un ouvert  $\Omega_i$  de  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout couple de régions  $R_i$  et  $R_j$  qui se superposent, il nous faudra construire une fonction de transition qui soit un  $C^1$ -difféomorphisme entre les parties de  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  qui correspondent à  $R_i \cap R_j$  (voir section ??). C'est pour simplifier cette construction que nous demandons que  $R_i \cap R_j$  soit homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Demander que  $R_i \setminus \overline{R_j}$  et  $R_j \setminus \overline{R_i}$  soient également homéomorphes à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  conduit à une disposition équilibrée des voisins d'une même région qui nous permettra d'assurer par définition la cohérence entre

les fonctions de transition qui lient trois régions voisines les unes aux autres. De même il nous faudra définir sur chaque  $\Omega_i$  une fonction  $\alpha$  de classe  $C^1$  qui soit égale à 1 dans la zone pure, à 0 en dehors de  $\Omega_i$  et à valeurs dans  $[0; 1]$  (une fonction d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement). C'est pourquoi nous posons les points 1 et 3 de la définition. Enfin, demander les points 4 et 5 nous assure un dual qui soit une triangulation combinatoire (voir paragraphe 4.2.2.2).

## 4.2.2 Dual d'un recouvrement bien formé

Pour définir un recouvrement, nous proposons d'adapter l'algorithme de division-fusion utilisé pour le partitionnement. Cet algorithme est construit autour du dual d'une partition. C'est pourquoi il nous faut définir le dual d'un recouvrement. Nous démontrerons ensuite que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire.

Les notions que nous présentons dans cette section sont des notions classiques de topologie combinatoire que l'on peut retrouver dans des ouvrages de référence tels que [Ale56, Ede]. Nous les avons déjà abordées dans la section ?? lors de la présentation des surfaces paramétrées par morceaux.

### 4.2.2.1 Le nerf : un dual naturel

Le nerf d'un recouvrement  $\mathcal{R}$  se définit de la façon suivante :

**Définition 8 (nerf)** *Le nerf d'un ensemble fini  $\mathcal{R}$  est le système des sous-ensembles de  $\mathcal{R}$  tels que l'intersection des éléments qui constituent chacun d'entre eux est non-vide,*

$$\text{Nrf } \mathcal{R} = \left\{ \alpha \subseteq \mathcal{R} \mid \bigcap_{R \in \alpha} R \neq \emptyset \right\}$$

Le nerf est le dual naturel d'un recouvrement car il est composé d'éléments associés aux régions et à leurs intersections (donc leur voisinage au sens donné par la définition 5), tout comme le graphe d'adjacence est composé de sommets associés aux régions d'une partition et d'arêtes associées à tout couple de régions voisines. Cela paraîtra plus clairement encore dans le cadre du dual d'un recouvrement bien formé.

### 4.2.2.2 Le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire

Nous démontrons dans ce paragraphe la proposition suivante :

**Proposition 1** *Le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire.*

Pour cela, nous commençons par quelques définitions avant de présenter la démonstration de cette proposition.

## Quelques définitions

**Définition 9 (Triangulation combinatoire)** Une triangulation combinatoire est un couple  $(G, F)$  où  $G$  est un graphe (non-orienté) et  $F$  un ensemble de cycles définis sur  $G$  et de longueur 3 tels que

- toute arête de  $G$  est incidente à deux et seulement deux cycles,
- pour tout sommet  $u$  de  $G$ , l'ensemble des cycles incidents à  $u$  peuvent être ordonnés en  $(f_0, \dots, f_{k-1})$ ,  $k > 1$  de telle sorte que  $f_i$  soit adjacent à  $f_{i+1}$  (modulo  $k$ ) pour tout  $i \in \{0 \dots k-1\}$  (on dit alors que ces cycles constituent le parapluie de  $u$ ),
- tout sommet de  $G$  est incident à au moins trois arêtes de  $G$ .

**Définition 10 (Graphe)** Un graphe  $G = (X, U)$  est le couple constitué de

- $X$  un ensemble d'éléments appelés nœuds ou sommets,
- $U$  un ensemble de couples de sommets, appelés arêtes.

REMARQUE —

Le graphe est dit orienté si les éléments de chaque couple de  $U$  sont ordonnés. On les appelle alors arcs plutôt qu'arêtes.

**Définition 11 (Cycle)** Un cycle défini sur un graphe  $G$  est une séquence ordonnée d'arêtes telles que

- deux arêtes successives partagent une et une seule extrémité,
- la première et la dernière arête partagent une et une seule extrémité.

REMARQUE —

Tout cycle de longueur 3 est nécessairement un cycle élémentaire (un cycle élémentaire ne contient aucune séquence d'arêtes extraite qui soit elle-même un cycle).

**Définition 12 (Incidence)**

Un sommet est incident à une arête s'il est une de ses extrémités.

Une arête est incidente à un cycle si elle appartient à la séquence qui définit le cycle.

Un cycle est incident à un sommet si ce sommet est incident à une des arêtes du cycle.

**Définition 13 (Adjacence)** Deux cycles sont adjacents s'ils ont au moins une arête en commun.



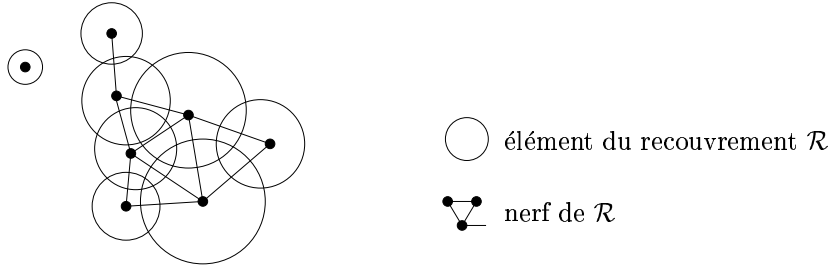


FIG. 4.5 – Un recouvrement et son nerf.

**Démonstration de la proposition 1** Démontrons à présent la proposition 1. Nous proposons une démonstration en quatre temps. Le premier consiste à exprimer le recouvrement sous la forme d'un couple  $(G, F)$ , et les trois suivants à démontrer que ce couple vérifie les trois propriétés énoncées dans la définition 9 (page 62).

**Lemme 1.1** *Le nerf d'un recouvrement bien formé est un couple  $(G, F)$  où  $G$  est un graphe et  $F$  est un ensemble de cycles définis sur  $G$  et de longueur 3.*

**Démonstration 1.1** Le nerf d'un recouvrement, défini dans le paragraphe 4.2.2.1, est constitué de sous-ensembles qui peuvent être regroupés selon leur cardinalité. Or d'après la propriété 4 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé, au plus trois régions peuvent de superposer en un même point. Le nerf est donc constitué de trois familles de sous-ensembles : les régions, les couples de régions voisines et les triplets de régions dont l'intersection est non vide.

On peut donc exprimer le nerf d'un recouvrement bien formé sous la forme d'un couple  $(G, F)$  où  $G$  est un graphe dont chaque sommet est associé à une région du recouvrement, et chaque arête à un couple de régions voisines, et  $F$  est un ensemble de cycles définis sur  $G$  de longueur 3 où chaque cycle est associé à un triplet de régions dont l'intersection est non vide. ■

REMARQUE —

Il est important de remarquer qu'à ce stade de la démonstration, on ne peut pas affirmer que les triplets de régions correspondant aux cycles de  $F$  sont les seuls triplets de régions voisines deux-à-deux (on peut *a priori* avoir de tels triplets sans que les trois régions s'intersectent en un même lieu).

Les trois propriétés sur  $(G, F)$  données dans la définition 9 se traduisent donc sur les régions du recouvrement en les trois lemmes suivants.

**Lemme 1.2** *Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux régions voisines d'un recouvrement bien formé. Il existe deux et seulement deux autres régions  $R_k$  et  $R_l$  telles que  $R_1 \cap R_2 \cap R_k \neq \emptyset$  et  $R_1 \cap R_2 \cap R_l \neq \emptyset$ .*

**Démonstration 1.2** Si  $R_1$  et  $R_2$  sont deux régions voisines d'un recouvrement bien formé, le lemme 1.2.3 (page 68) nous permet d'affirmer qu'il existe deux autres régions  $R_k$  et  $R_l$

telles que  $R_k \cap R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$  et  $R_l \cap R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ , et le lemme 1.2.4 (page 69) nous permet d'affirmer qu'il n'en existe pas d'autres.

Ce qui démontre le lemme 1.2. ■

**Lemme 1.3** *Soit une région  $R$  d'un recouvrement bien formé. Nous considérons l'ensemble des couples  $(R_1, R_2)$  de régions voisines telles que  $R_1 \cap R_2 \cap R \neq \emptyset$ . Les régions figurant dans cet ensemble peuvent être ordonnées en  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  de telle sorte que  $R_i$  et  $R_{i+1}$  soient voisines, pour tout  $j \in (0, \dots, k-1)$  (modulo  $k$ ).*

**Démonstration 1.3** Nous allons montrer d'une part que l'on peut ordonner ainsi une sous-famille parmi les voisines de  $R$ , et d'autre part, qu'aucune autre voisine n'existe.

$R$  admet au moins une voisine. En effet, si ce n'était pas le cas, soit  $R$  est l'unique région du recouvrement ce qui nierait la propriété 5 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé, soit  $\partial R \subset \mathcal{M}$  et alors chacun de ses points appartient à une autre région (propriété 4 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé). Comme les régions sont ouvertes, cette autre région intersecte  $R$ .

Soit donc  $R_0$  une région voisine de  $R$ . Le lemme 1.1 nous permet d'affirmer qu'il existe deux et seulement deux autres régions intersectant  $R \cap R_0$ . On nomme l'une d'elles  $R_1$ . On applique le même raisonnement sur  $R \cap R_1$ . L'une des deux régions intersectant  $R \cap R_1$  est  $R_0$ , on nomme l'autre  $R_2$ . On construit ainsi de proche en proche la séquence  $(R_0, \dots, R_{k-1})$ , où  $R_{k-1}$  est la deuxième région intersectant  $R \cap R_0$  (avec  $R_1$ ). En effet la séquence boucle car  $\partial R$  est continûment paramétrable sur  $\mathcal{C}$  et le recouvrement est fini (propriété 5 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé).

Supposons qu'il existe une autre région voisine de  $R$  notée  $R_k$ . Par hypothèse,  $R \cap R_k \subset R \setminus \bigcup_{0, \dots, k-1} R_i$ . Aussi, comme  $R \setminus \bigcup_{0, \dots, k-1} R_i$  est un fermé,  $R \setminus \overline{R_k}$  n'est pas homéomorphe à  $D$ , ce qui contredit la propriété 1 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé. ■

**Lemme 1.4** *Toute région d'un recouvrement bien formé admet au moins trois régions voisines.*

**Démonstration 1.4** Il s'agit de montrer que toute région d'un recouvrement bien formé admet au moins trois régions voisines.

Nous avons déjà vu dans la démonstration du lemme précédent, que toute région avait au moins un voisin.

Aussi, le lemme 1.1 implique alors l'existence de deux autres régions voisines. Ce qui achève la démonstration. ■

REMARQUE —

La réciproque de la proposition 1 est fautive comme l'illustre la figure 4.6 : un recouvrement dont le nerf est une triangulation combinatoire n'est pas nécessairement bien formé.

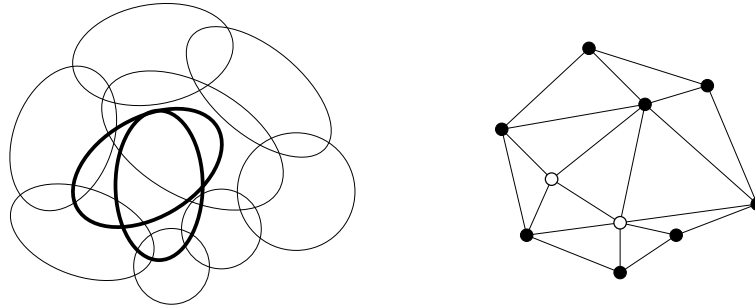


FIG. 4.6 – Exemple de recouvrement mal formé dont le graphe d'adjacence est pourtant bien une triangulation combinatoire. Les deux éléments en trait épais à gauche, représentés par les sommets blancs dans le graphe d'adjacence à droite ne suivent pas la propriété 2 de la définition 7

**Sous-lemmes nécessaires à la démonstration du lemme 1.2** Pour démontrer le lemme 1.2, nous procédons en quatre temps :

**Lemme 1.2.1** *Soient deux régions voisines  $R_1$  et  $R_2$  d'un recouvrement, homéomorphes à  $D$  et ayant une intersection conforme. Les frontières de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_1 \cap R_2$  sont toutes trois décomposables en quatre parties connexes non vides, deux ouvertes et deux fermées (alternativement lors d'un parcours de la frontière) telles que les deux parties fermées appartiennent aux trois frontières.*

Ce lemme est démontré en annexe A.

Nous appelons frontière d'une région l'ensemble des points appartenant à son adhérence privée de son intérieur. Dans le cas d'un recouvrement, chaque région est ouverte. Sa frontière s'écrit alors

$$\partial R = \overline{R} \setminus R \quad (4.1)$$

Dans un premier temps, nous supposons les parties fermées communes aux trois frontières réduites à deux points notés  $A$  et  $B$ . Nous généraliserons les résultats en fin de démonstration. Les trois lemmes suivants concernent des régions appartenant à un recouvrement bien formé. Elles suivent donc en particulier les hypothèses du lemme 1.2.1 (d'après la propriété 1 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé,  $R_1$  et  $R_2$  sont homéomorphes à  $D$ , et d'après la propriété 2,  $R_1$  et  $R_2$  ont une intersection conforme).

**Lemme 1.2.2** *Les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la zone pure d'une région différente de  $R_1$  et  $R_2$ .*

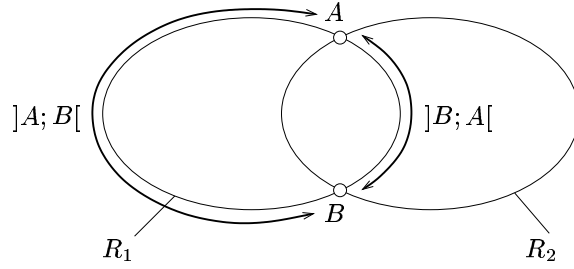


FIG. 4.7 –

**Démonstration 1.2.2** En effet,  $A \in \partial R_1$  donc, d'après l'équation 4.1,  $A \notin R_1$ . De même,  $A \notin R_2$ .

Or d'après la propriété 4 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé, tout point appartient à au moins une région.

Donc il existe une région  $R_k$  contenant  $A$  telle que  $k \notin \{1, 2\}$ .

Démontrons que  $A$  appartient à la zone pure de  $R_k$ , autrement dit qu'il n'appartient à aucune autre région du recouvrement.

Supposons qu'il existe  $l \notin \{1, 2, k\}$  tel que  $A \in R_l$ .

$R_k \cap R_l$  est un ouvert et  $A \in \overline{R_1 \cap R_2}$ , donc il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}$  centrée sur  $A$ , contenue dans  $R_k \cap R_l$  et telle que  $\mathcal{B} \cap R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ .

Ce qui contredit la propriété 4 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé, selon laquelle tout point ne peut appartenir à plus de trois régions.

De la même manière, on montre que  $B$  appartient à la zone pure d'une région  $R_l$  telle que  $l \notin \{1, 2\}$ .

Rien ne permet d'affirmer pour le moment que  $k$  est différent de  $l$ . ■

Avant de démontrer le lemme suivant, nous proposons une étude des différentes configurations possibles entre  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_k$  et  $R_l$ .

$R_1$  et  $R_k$  sont voisines. On peut donc définir de la même manière deux points  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  sur  $\partial R_1$ .

Ces deux points se positionnent soit sur la composante connexe  $]A; B[$  de  $\partial R_1$  (arc allant de  $A$  à  $B$  dans le sens trigonométrique au sens défini précédemment grâce aux paramétrisations continues sur  $\mathcal{C}$ ), soit sur  $]B; A[$ .

Si les deux points appartiennent à  $]B; A[$ , comme ils sont les uniques points d'intersection entre  $\partial R_1$  et  $\partial R_k$ ,  $A$  ne peut appartenir à  $R_k$  que si  $\partial R_k$  est contenue dans  $R_1 \cup R_2$  (figure 4.8).  $R_k$  étant homéomorphe à  $D$ , cela implique que le recouvrement est constitué des trois seules régions  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_k$ , ce qui contredit la propriété 5 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé. Donc au moins un des deux points  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  appartient à  $]A; B[$ . Nous le notons  $A_{1k}$ .

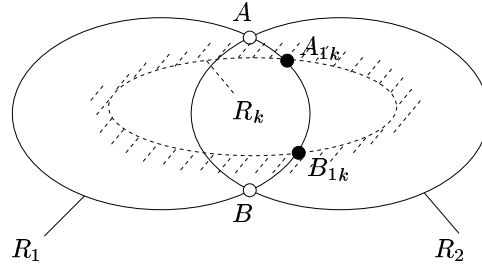


FIG. 4.8 -

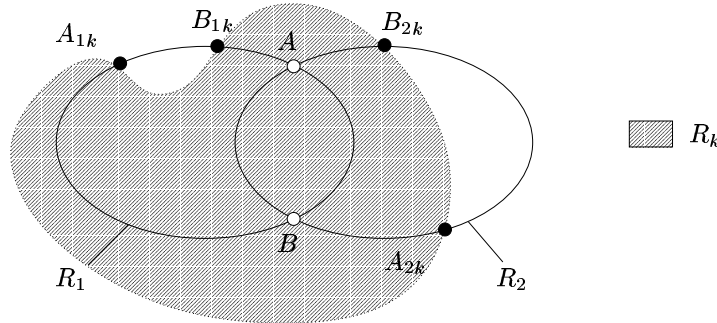


FIG. 4.9 -

Supposons que  $B_{1k}$  appartienne lui aussi à  $]A; B[$ , et plus précisément à  $]A; A_{1k}[$  (figures 4.9 et 4.10).

Comme  $A \in R_k$  et que  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  sont les deux seuls points où  $\partial R_k$  traverse  $\partial R_1$ , la composante connexe de  $\partial R_1 [A_{1k}; B_{1k}]$  est incluse dans  $R_k$ .

Cela implique en particulier que  $R_k = R_l$  et que les points  $A_{2k}$  et  $B_{2k}$  appartiennent à la composante connexe de  $\partial R_2 ]B; A[$ .

Les points se répartissent alors sur  $\partial R_k$  dans l'ordre trigonométrique selon deux séquences possibles. Si cet ordre est  $(B_{1k}, A_{1k}, A_{2k}, B_{2k})$ ,  $A$  et  $B$  appartiennent à la zone pure de  $R_k$  qui se révèle alors se diviser en deux composantes connexes, ce qui contredit la propriété 3 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé.

Si cet ordre est  $(B_{1k}, A_{1k}, B_{2k}, A_{2k})$ , nous butons sur un problème d'orientation. En effet,  $R_k$  étant homéomorphe à  $D$ , on peut définir un intérieur et un extérieur à  $R_k$  à partir des définitions données sur  $D$  et transmises à la région par l'homéomorphisme. Lors d'un parcours trigonométrique de  $\partial R_k$ , les points de  $R_k$  se trouvent alors toujours à gauche du parcours, ce qui n'est pas le cas avec cet ordre (figure 4.10).

Un résultat identique se trouve si  $B_{1k}$  appartient à  $]A_{1k}; B[$ . Cela signifie donc que  $B_{1k}$  appartient nécessairement à la composante connexe de  $\partial R_1, ]B; A[$ .

A ce stade de l'étude des configurations, on peut démontrer le lemme 1.2.3.

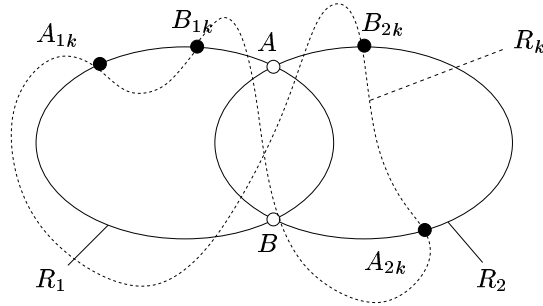


FIG. 4.10 -

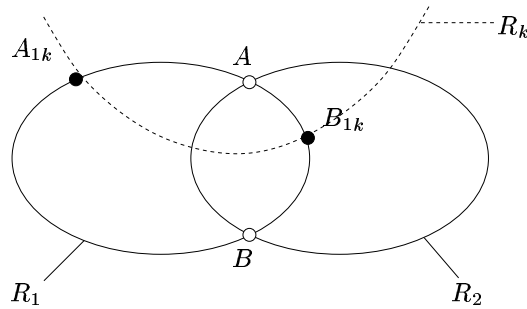


FIG. 4.11 -

**Lemme 1.2.3** *Les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la zone pure de deux régions différentes  $R_k$  et  $R_l$ .*

**Démonstration 1.2.3** En effet, si  $R_l = R_k$ , alors  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  sont les seuls points où  $\partial R_k$  traverse  $\partial R_1$  et  $A$  et  $B$  se trouvent de part et d'autre de la composante connexe de  $\partial R_k$ ,  $]A_{1k}; B_{1k}[$ .  $A$  et  $B$  ne peuvent donc appartenir tous deux à  $R_k$  (figure 4.11). D'où le résultat. ■

Poursuivons les études de configurations.  $R_k \neq R_l$ , donc il existe un point  $A_{1l} \in ]A; B[$  et  $B_{1l} \in ]B; A[$ .

Si  $B_{1l}$  appartient à la composante connexe de  $\partial R_1$   $]B_{1k}; A[$  alors  $]B_{1k}; B_{1l}[ \subset R_k \cap R_l \cap R_2$  (figure 4.12).

Un raisonnement analogue à celui conduit pour démontrer le lemme 1.2.2 amène à  $R_k \cap R_l \cap R_2 \cap R_1 \neq \emptyset$ , ce qui contredit la propriété 4 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé.

Donc,  $B_{1l}$  appartient à la composante connexe de  $\partial R_1$ ,  $]B; B_{1k}[$  (figure 4.13).

La position relative de  $A_{1k}$  et  $A_{1l}$  sur  $\partial R_1$  n'est pas très importante. Elle permettrait juste de savoir si  $R_1$  possède d'autres régions voisines que  $R_2$ ,  $R_k$  et  $R_l$ .

Nous avons donc achevé l'étude des configurations. Nous pouvons terminer la démonstration des lemmes.

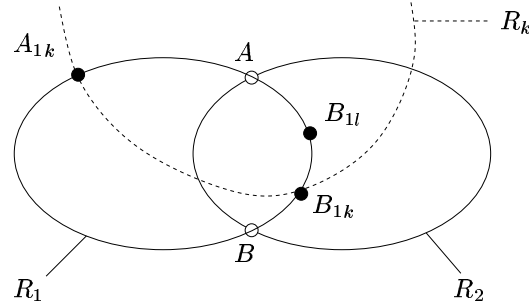


FIG. 4.12 -

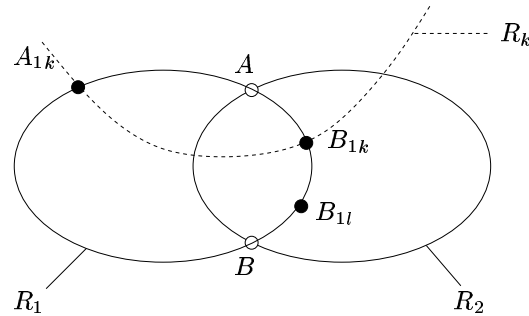


FIG. 4.13 -

Démontrons le lemme 1.2.4.

**Lemme 1.2.4** *Si  $R_m$  est une région telle que  $R_1 \cap R_2 \cap R_m \neq \emptyset$  alors  $m \in \{k, l\}$ .*

**Démonstration 1.2.4** Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas d'autres régions que  $R_k$  et  $R_l$  qui ait une intersection non vide avec  $R_1 \cap R_2$ .

Supposons qu'il en existe une, notée  $R_m$ . Pour ne pas contredire la propriété 4 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé,  $R_m$  intersecte  $R_1 \cap R_2$  dans  $(R_1 \cap R_2) \setminus (R_k \cup R_l)$ . D'après l'étude de configurations conduite ci-dessus, la frontière de  $R_m$  intersecte celle de  $R_1$  dans sa composante connexe  $]A; B[$  ou dans sa composante connexe  $]B_{1l}; B_{1k}[$  (figures 4.14 et 4.15).

Si les deux points où  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_1$  appartiennent à  $]B_{1l}; B_{1k}[$  et les deux points où  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_2$  appartiennent à  $]B_{2k}; B_{2l}[$  (composante connexe de  $\partial R_2$ ), alors  $R_m \subset R_1 \cup R_2$  et donc sa zone pure serait vide, ce qui contredit la propriété 3 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé (figure 4.14).

Supposons que  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_1$  en un point  $A_{1m}$  qui appartienne à  $]A; B[$ . Si son deuxième point de passage dans  $R_1$  appartient également à  $]A; B[$ , alors nécessairement  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_2$  en deux points  $A_{2m}$  et  $B_{2m}$  appartenant à  $]B_{2k}; B_{2l}[$  :  $R_m$  est homéomorphe à  $D$  et sa frontière ne traverse celle de  $R_1$  qu'en deux points. Comme nous l'avons établi dans la démonstration du lemme 1.2.2,  $A_{2m}$  et  $B_{2m}$  appartiennent à la zone pure de  $R_1$  qui

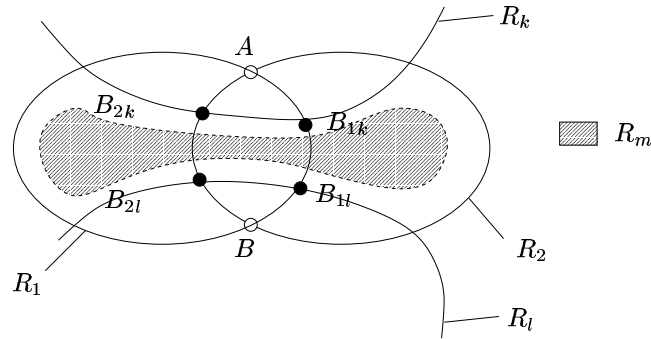


FIG. 4.14 -

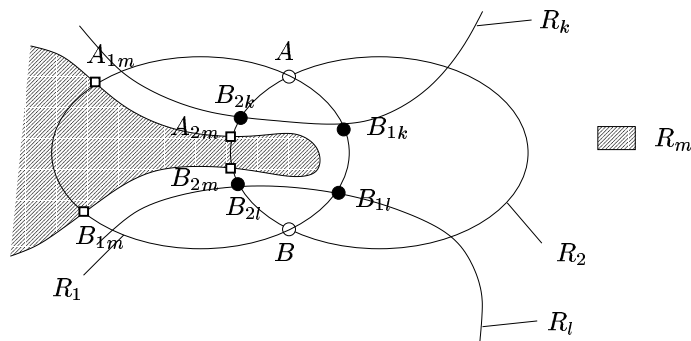


FIG. 4.15 -

se retrouve alors découpée en deux composantes connexes, ce qui contredit la propriété 3 de la définition 7 d'un recouvrement bien formé (figure 4.15).

Donc le deuxième point de passage de  $\partial R_m$  dans  $R_1$  appartient à  $]B_{1l}; B_{1k}[$ . Mais alors la composante connexe  $]A_{1m}; B_{1m}[$  de  $\partial R_1$  est incluse dans  $R_m$ . En particulier  $B$  est inclus dans  $R_m$ , ce qui contredit le lemme 1.2.2.

Par conséquent, une telle région  $R_m$  n'existe pas. ■

Pour terminer la démonstration du lemme 1.2, nous proposons quelques commentaires sur l'hypothèse selon laquelle les deux composantes connexes fermées de  $\partial(R_1 \cap R_2)$   $a$  et  $b$  étaient réduites à deux points  $A$  et  $B$ . Si ce n'est pas le cas, les trois derniers lemmes restent vrais. Nous ne démontrons ici que le premier, les deux autres étant sensiblement identiques aux versions déjà proposées, mais avec quelques précautions à prendre pour les cas où des composantes connexes fermées de différentes frontières se superposeraient.

Le lemme 1.2.2 devient, avec ces nouvelles hypothèses :

Tout point de  $a$  appartient à la zone pure d'une région  $R_k$  et tout point de  $b$  appartient à la zone pure d'une région  $R_l$ .

Pour montrer cela, nous commençons par remarquer que l'ancien lemme 1.2.2 s'applique à chaque point de  $a$ .

Il suffit donc de montrer que la nouvelle région à laquelle appartient un point de  $a$  est la même pour tous les points de  $a$ .



Soit donc  $A_1$  un point de  $a$  appartenant à la zone pure de  $R_k$  et  $A_2$ , le premier point de  $a$  dans un parcours trigonométrique de  $\partial R_1$ , qui appartienne à une autre région  $R_m$ .

$R_m$  étant ouverte, il existe une boule centrée en  $A_2$  et contenue dans  $R_m$ , ce qui contredit que  $A_2$  soit le premier point dans le parcours de  $a$  qui appartienne à  $R_m$ . Donc  $A_2$  n'existe pas.

### 4.3 Régions fusionnables

Au début de ce chapitre, nous avons défini ce qu'est un recouvrement bien formé. Nous souhaitons à présent le construire par un algorithme, adapté de l'algorithme de partitionnement dit de division-fusion. Cet algorithme est basé sur le principe de la fusion de régions voisines, ce qui se traduit par la simplification du dual.

Dans le cas d'un recouvrement bien formé, toute fusion de régions voisines n'est pas possible : il faut que le recouvrement, après fusion, soit encore bien formé. Nous proposons d'établir dans cette section des conditions sur le dual d'un recouvrement pour qu'après fusion, le recouvrement soit encore bien formé. En effet, le dual permet de stocker de façon efficace des relations topologiques entre régions.

Nous avons établi dans la section précédente que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Hélas, comme l'illustre la figure 4.6 la réciproque n'est pas vraie. Nous devons donc analyser plus finement les relations liant le recouvrement à son dual.

#### 4.3.1 Correspondance entre les zones d'un recouvrement bien formé et les éléments du nerf

Nous avons défini dans la section précédente des zones pures d'un recouvrement bien formé comme l'ensemble des points n'appartenant qu'à une seule région donnée. De la même manière, nous pouvons définir des zones doubles et triples :

**Définition 14 (Zone double)** *La zone double de deux régions voisines  $R_1$  et  $R_2$  est l'ensemble des points qui appartiennent à ces deux régions et seulement à elles :*

$$zd(R_1, R_2) = \{x \in R_1 \cap R_2 : \forall R \in \mathcal{R}, x \in R \Rightarrow (R = R_1) \text{ ou } (R = R_2)\}$$

**Définition 15 (Zone triple)** *La zone triple de trois régions voisines  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  est l'ensemble des points qui appartiennent à ces trois régions et seulement à elles :*

$$zt(R_1, R_2, R_3) = \{x \in R_1 \cap R_2 \cap R_3 : \forall R \in \mathcal{R}, x \in R \Rightarrow (R = R_1) \text{ ou } (R = R_2) \text{ ou } (R = R_3)\}$$

Dans le cas d'un recouvrement bien formé,  $zt(R_1, R_2, R_3) = R_1 \cap R_2 \cap R_3$  car tout point appartient à au plus trois régions.

Notons  $\mathcal{R}$  un recouvrement bien formé et  $(G, F)$  son nerf. On associe naturellement

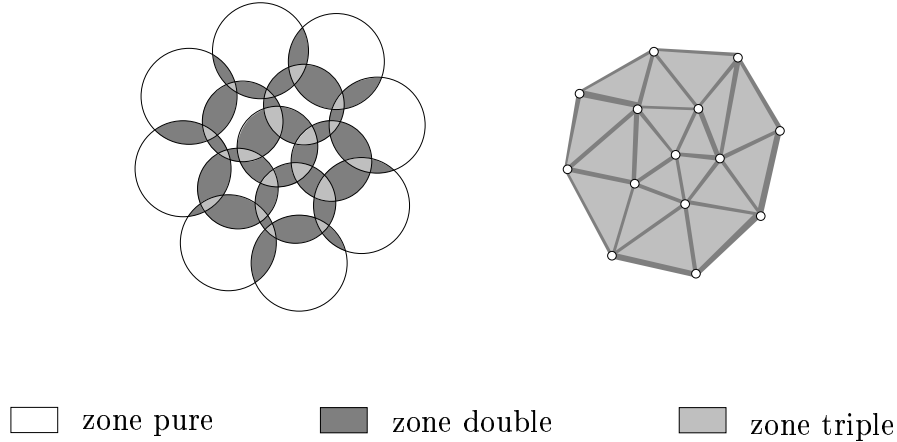


FIG. 4.16 – Associations entre les zones d'un recouvrement et les éléments de son nerf.

- une zone pure de  $\mathcal{R}$  à un sommet  $s$  de  $G$ , et on la note  $s^\#$ ,
- une zone double de  $\mathcal{R}$  à une arête  $e$  de  $G$ , et on la note  $e^\#$ ,
- une zone triple de  $\mathcal{R}$  à un élément (nommé face)  $f$  de  $F$ , et on la note  $f^\#$ .

Par analogie avec la notation d'un espace dual, nous notons  $e^{\#\#} = e$ . Nous notons donc réciproquement  $zp^\#$  le sommet associé à la zone pure  $zp$ ,  $zd^\#$  l'arête associée à la zone double  $zd$ , et  $zt^\#$  la face associée à la zone triple  $zt$ .

De plus, l'étude de configurations menée dans la section précédente nous permet d'affirmer :

**Lemme 1.3** *Dans un recouvrement bien formé :*

- toute zone pure est un fermé connexe non vide et sans trou,
- toute zone double est continuellement paramétrisable sur le carré  $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in ]0; 1[ ; v \in [0; 1]\}$ ,
- toute zone triple est homéomorphe à  $D$ .

La zone pure est sans trou car sinon cela signifierait qu'une région (connexe par hypothèse) est complètement incluse dans  $R$  ce qui impliquerait alors que sa propre zone pure est vide.

Nous considérons alors l'ensemble des domaines qui sont définis sur  $\mathcal{M}$  comme l'union de zones pures, doubles et triples définies par  $\mathcal{R}$ . Parmi ces domaines, il y a naturellement les régions du recouvrement  $\mathcal{R}$ .

Si  $H$  est un sous-ensemble de  $(G, F)$ , on note  $H^\#$  le domaine égal à l'union  $\bigcup_{u \in H} u^\#$ . Réciproquement, si  $R = \bigcup_{i \in I} z_i$  est une union de zones pures, doubles ou triples, on note  $R^\#$  le sous-ensemble de  $(G, F)$  égal à  $\{z_i^\#\}_{i \in I}$ .

Grâce au lemme 1.3, nous pouvons lier les propriétés de  $H$  à celles de  $H^\#$  :

**Lemme 1.4** *Soit  $H$  un sous-ensemble de  $(G, F)$ .*

*$H^\#$  est un fermé connexe non vide et sans trou si et seulement si*

1. pour toute paire  $(u, v)$  d'éléments de  $H$ , il existe une séquence  $(e_i)_{i \in 0 \dots k-1}$  de  $k$  éléments de  $H$  tels que  $e_i$  est adjacent à  $e_{i+1}$  pour tout  $i < k$ ,  $e_0 = u$  et  $e_{k-1} = v$  ;
2. pour toute paire  $(u, v)$  d'éléments n'appartenant pas à  $H$ , il existe une séquence  $(e_i)_{i \in 0 \dots k-1}$  de  $k$  éléments n'appartenant pas à  $H$  tels que  $e_i$  est adjacent à  $e_{i+1}$  pour tout  $i < k$ ,  $e_0 = u$  et  $e_{k-1} = v$  ;
3.  $H$  contient au moins un sommet de  $G$  ;
4. pour toute face de  $H$ , les arêtes et les sommets de  $G$  qui lui sont adjacents appartiennent également à  $H$  ;
5. pour toute arête de  $H$ , les sommets de  $G$  qui lui sont adjacents appartiennent également à  $H$ .

**Démonstration 1.4** La première propriété est équivalente à  $H^\#$  connexe.

La deuxième propriété est équivalente à  $H^\#$  sans trou.

La troisième propriété implique que  $H^\#$  est non vide.

Réciproquement, d'après le lemme 1.3, aucune union de zones doubles et triples ne peut être fermée. Donc si  $H^\#$  est un fermé non vide,  $H$  contient nécessairement un sommet.

Les deux dernières propriétés sont équivalentes à " $H^\#$  est un fermé", d'après le lemme 1.3.

■

### 4.3.2 La fusion de régions doit préserver la topologie du nerf

Nous considérons un recouvrement bien formé  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  d'un espace topologique  $\mathcal{M}$ .

Nous notons  $(G, F)$  son nerf.

Soit  $J \subset I$  et  $S = \bigcup_{j \in J} R_j$ .

Nous notons  $\mathcal{S}$  le recouvrement après fusion des  $R_j$  en  $S$  :  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J} \cup S$ .

Nous établissons dans cette section quelles propriétés sur  $S^\#$ , sous-ensemble de  $(G, F)$ , permettent d'assurer que  $\mathcal{S}$  est bien formé.

Pour cela, nous commençons par quelques définitions :

**Définition 16 (Partie pure)** Soit  $H$  un sous-ensemble de  $(G, F)$ .

La partie pure de  $H$ , notée  $\langle H \rangle$ , est l'ensemble des sommets de  $H$ , des arêtes de  $H$  dont les deux extrémités appartiennent à  $H$ , et des faces de  $H$  dont les arêtes et les sommets incidents appartiennent à  $H$ .

**Définition 17 (Partie partagée)** Soit  $H$  un sous-ensemble de  $(G, F)$  et  $u$  un sommet de  $G$  n'appartenant pas à  $H$ .

La partie partagée  $\langle H, u \rangle$  est l'ensemble des faces et des arêtes de  $(G, F)$  incidentes à  $u$  et à un élément de  $H$  : un sommet s'il s'agit d'une arête, une arête s'il s'agit d'une face.

Nous poursuivons par deux résultats :

**Lemme 1.5** *Tout sommet de  $S^\#$  admet un parapluie dont tous les éléments appartiennent à  $S^\#$ .*

**Démonstration 1.5**  $S$  est une union de régions d'un recouvrement bien formé.

Or nous avons montré lors de la démonstration de la proposition 1 selon lequel le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire, que tout sommet  $u$  de  $\mathcal{R}$  admet un parapluie dans  $\mathcal{R}$ .

On note  $R$  la région dont  $u^\#$  est la zone pure. Les éléments constituant ce parapluie correspondent par définition aux zones doubles et triples de  $R$ .

Ainsi tout sommet de  $S^\#$  correspond à la zone pure d'une région  $R_j$  dont les zones doubles et triples appartiennent par définition à  $S$ . Donc tout sommet de  $S^\#$  admet un parapluie dont tous les éléments appartiennent à  $S^\#$ . ■

**Lemme 1.6** *Considérons les zones pures et doubles dans le nouveau recouvrement  $\mathcal{S}$ .*

*On a*

$$\begin{aligned} zp(S) &= \langle S^\# \rangle^\# \\ \forall R \in \mathcal{S} \setminus S, zd(S, R) &= \langle S^\#, R^\# \rangle^\# \end{aligned}$$

où  $S^\#$  et  $R^\#$  sont définis sur l'ancien recouvrement  $\mathcal{R}$ .

**Démonstration 1.6** La zone pure de  $S$  est, par définition, l'ensemble des points de  $\mathcal{M}$  qui n'appartiennent qu'à  $S$ .

Nous démontrons en annexe A que  $zp(S)$  est composée de l'ensemble des zones pures des régions  $R_j$ ,  $j \in J$ , des zones doubles des couples  $(R_k, R_l)$  telles que  $k \in J$  et  $l \in J$ , et des zones triples des triplets  $(R_k, R_l, R_m)$  telles que  $k \in J$ ,  $l \in J$  et  $m \in J$ .

On en déduit donc que  $zp(S)^\#$  est l'ensemble des sommets de  $S^\#$ , des arêtes de  $S^\#$  dont les deux extrémités appartiennent à  $S^\#$ , et des faces de  $S^\#$  dont les arêtes et les sommets incidents appartiennent à  $S^\#$ . On reconnaît la définition de la partie pure de l'ensemble  $S^\#$ , notée  $\langle S^\# \rangle$ . D'où le résultat.

Soit  $R \in \mathcal{S} \setminus S = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J}$ .

La zone double de  $(S, R)$  est, par définition, l'ensemble des points de  $\mathcal{M}$  qui n'appartiennent qu'à  $S \cap R$ .

Nous démontrons en annexe A que  $zd(S, R)$  est composée de l'ensemble des zones doubles des couples de régions dont une seule appartient à  $\{R_j\}_{j \in J}$ , et des zones triples des triplets de régions dont deux et seulement deux appartiennent à  $\{R_j\}_{j \in J}$ .

On en déduit donc que  $zd(S, R)^\#$  est l'ensemble des arêtes de  $S^\#$  dont une et une seule extrémité appartient à  $S^\#$  et des faces de  $S^\#$  dont une et une seule arête incidente appartient à  $S^\#$ . On reconnaît la définition de la partie partagée  $\langle S^\#, R^\# \rangle$ . D'où le résultat. ■

Nous pouvons à présent proposer des conditions suffisantes sur  $S$  et  $S^\#$  pour que  $\mathcal{S}$  soit un recouvrement bien formé :

**Proposition 2** *Nous considérons un recouvrement bien formé  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  d'un espace topologique  $\mathcal{M}$ .*

*Soit  $J \subset I$  tel que  $I \setminus J$  contienne au moins trois indices et  $S = \bigcup_{j \in J} R_j$ .*

*Si  $S$  est homéomorphe à  $D$ , et si, dans le nerf de  $\mathcal{R}$ ,*

- *les éléments constituant la partie pure  $\langle S^\# \rangle$  suivent les hypothèses du lemme 1.4 ;*
- *$\forall R \in \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J}$  telle que  $R \cap S \neq \emptyset$ , la partie partagée  $\langle S^\#, R^\# \rangle$  est composée d'arêtes et de faces pouvant être ordonnées en la séquence  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$ ,  $k > 0$ , où  $f_i$  est incidente à  $e_i$  et  $e_{i+1}$  pour tout  $i < k - 1$  ;*

*alors le recouvrement  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J} \cup S$  est bien formé.*

**Démonstration 2** Demander que  $I \setminus J$  contienne au moins trois indices assure que  $\mathcal{S}$  contienne au moins quatre régions.

La fusion de régions ne peut que diminuer le nombre de régions en tout point sans pour autant que ce nombre ne s'annule. Tout point de  $\mathcal{M}$  appartient donc au moins à une et au plus à trois régions de  $\mathcal{S}$  (car  $\mathcal{R}$  est supposé bien formé).

Les trois autres propriétés énoncées dans la définition 7 d'un recouvrement bien formé sont assurées lorsqu'elles ne font pas entrer en jeu  $S$ , car  $\mathcal{R}$  est supposé bien formé.

$S$  est homéomorphe à  $D$  par hypothèse.

Montrons à présent que toute paire de régions voisines a une intersection conforme.

Soit  $R \in \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J}$  telle que  $R \cap S \neq \emptyset$ . Alors par hypothèse et d'après le lemme 1.6, la zone double  $zd(S, R)$  est représentée par une séquence  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$  où les éléments sont incidents deux-à-deux. Aussi, le sommet  $u$  associé à la zone pure de  $R$  admet un parapluie dans le nerf de  $\mathcal{R}$  (ce dernier est bien formé). Donc la séquence  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$  peut être complétée par deux faces incidentes respectivement à  $e_0$  et  $e_{k-1}$  en  $(f_{-1}, e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1}, f_{k-1})$ . Si  $f_{-1} = f_{k-1}$ , cela signifierait que le parapluie de  $u$  est contenu dans  $S^\#$ , ce qui contredirait la première hypothèse sur  $\langle S^\# \rangle$ .

De plus,  $f_{-1}$  et  $f_{k-1}$  représentent les zones triples de  $R$ , d'une région de  $\{R_j\}_{j \in J}$  et d'une région n'appartenant pas à cet ensemble. En effet, si cette troisième région lui appartenait, l'arête représentant la zone double l'associant avec  $R$  ferait partie de  $\langle S^\#, R^\# \rangle$ . De même, aucun autre élément de  $S^\#$  n'est incident à  $u$ . Ce qui implique que

$$(f_{-1}, e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1}, f_{k-1})$$

représente  $S \cap R$ .

On en déduit que  $S \cap R$  et  $R \setminus \overline{S}$  sont tous deux homéomorphes à  $D$ . Pour affirmer que  $S \setminus \overline{R}$  est lui-aussi homéomorphe à  $D$ , il suffit de remarquer d'une part que les extrémités des arêtes de  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$  différentes de  $u$ , appartiennent à  $\langle S^\# \rangle$ , et d'autre part que  $\langle S^\# \rangle$  suit les hypothèses du lemme 1.4.

$S$  et  $R$  ont donc une intersection conforme.

Terminons par montrer que  $S$  admet une zone pure qui est un fermé connexe et non vide.

Cela est assuré par l'hypothèse selon laquelle  $\langle S^\# \rangle$  suit les hypothèses du lemme 1.4 et par le lemme 1.5 qui affirme que  $zp(S) = \langle S^\# \rangle^\#$ . ■

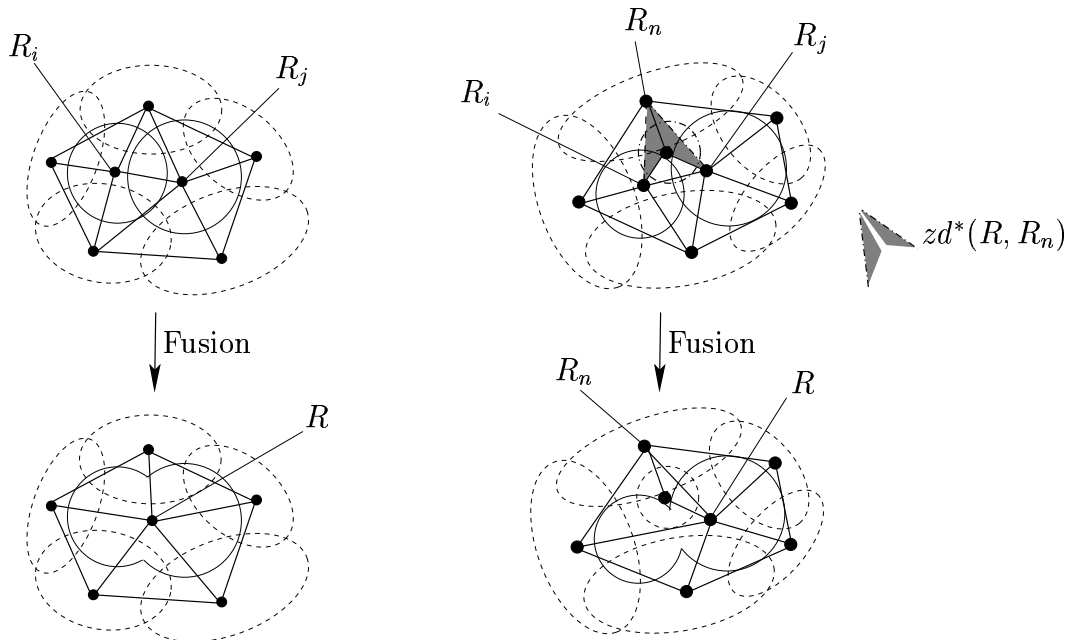


FIG. 4.17 – A gauche, une fusion de deux régions (en trait plein) légale. A droite une fusion illégale : l'ensemble des arêtes et des faces de  $zd^*(R, R_n)$  ne forme pas un ensemble d'éléments adjacents.

Terminons cette section en remarquant que le nerf de  $\mathcal{S}$  est alors constitué des éléments du nerf de  $\mathcal{R}$  hormis les suivants. Les éléments de la partie pure  $\langle S^\# \rangle$  sont remplacés par un sommet représentant la zone pure  $zp(S)$ . Les éléments de la partie partagée  $\langle S^\#, R^\# \rangle$  sont remplacés par une arête représentant la zone double  $zd(S, R)$ .

Les zones triples concernant  $S$  sont quant à elles représentées par les faces  $f_{-1}$  et  $f_{k-1}$  évoquées dans la démonstration précédente.

## 4.4 Algorithme de construction d'un recouvrement bien formé sur une surface triangulée

Nous avons terminé l'étude théorique des recouvrements d'une variété de dimension 2 connexe et compacte. Nous avons défini ce qu'est un recouvrement bien formé, nous avons défini son dual comme étant le nerf du recouvrement et démontré qu'il s'agissait d'une triangulation combinatoire. Enfin, nous avons établi une condition suffisante sur le dual d'un recouvrement pour que le recouvrement résultant de la fusion de plusieurs régions soit encore bien formé.

Il nous reste à appliquer ces résultats théoriques à la construction d'un recouvrement bien formé sur une surface triangulée  $\mathcal{M}$  qui est une variété de dimension 2 connexe et

compacte (figure 4.18). L'algorithme comporte deux phases. La première, étape de division, consiste à définir un premier recouvrement bien formé. La deuxième, étape de fusion, consiste à fusionner des régions entre elles, construisant ainsi plusieurs recouvrements successifs au nombre de régions décroissant. Cette deuxième étape est conduite sur le dual du recouvrement. En effet, une fusion de régions est équivalente à une simplification particulière du dual.

Pour illustrer cet algorithme, nous utilisons quatre maillages. Le premier, nommé *sphere* est une triangulation interpolant des points sur une sphère. Elle est constituée de 162 sommets et de 320 faces. Il s'agit de la plus simple surface respectant les hypothèses que nous avons posées. Le deuxième maillage est nommé *hippocampus* et résulte de la numérisation d'une glande présente dans le cerveau. Il est constitué de 1002 sommets et de 2000 faces. Le troisième maillage, *meche*, peut être considéré comme un exemple de numérisation d'un objet mécanique. Il est constitué de 1572 sommets et de 3152 faces. Enfin, *croissants* est un maillage synthétique composé de 542 sommets et de 1080 faces.

#### 4.4.1 Etape de division : Premières régions sur une surface triangulée

La première étape de notre algorithme est la définition d'un recouvrement bien formé constitué de petites régions. Aussi ce recouvrement doit être défini sur  $\mathcal{M}$ , une surface triangulée connexe et compacte. Le choix naturel pour ce premier recouvrement est alors de définir une région  $R_i$  par sommet  $s_i$  de  $\mathcal{M}$ .  $R_i$  est l'union de  $s_i$  et de l'ensemble des arêtes et des faces incidentes à  $s_i$  (figure 4.19).

Le recouvrement est bien formé car, par définition, une triangulation connexe, sans bord et bornée possède au moins quatre sommets, et  $R_i$  est homéomorphe à un disque ouvert et non vide de  $\mathbb{R}^2$ . La zone pure de  $R_i$  est réduite au sommet  $s_i$  qui est bien un fermé connexe sans trou. Tout point appartient à une région au moins, et comme un triangle est incident à trois sommets et une arête est incidente à deux sommets, tout point appartient à au plus trois régions. Enfin, l'intersection de deux régions  $R_1$  et  $R_2$  est l'union de l'arête incidente aux deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  et des deux faces triangulaires incidentes à cette arête : cet ensemble est bien homéomorphe à un disque ouvert et non vide de  $\mathbb{R}^2$  tout comme  $R_1 \setminus \overline{R_2}$  et  $R_2 \setminus \overline{R_1}$ .

#### 4.4.2 Etape de fusions : deux stratégies complémentaires

##### 4.4.2.1 Présentation des deux stratégies

La deuxième étape de notre algorithme consiste à fusionner des régions ensemble de telle sorte que le recouvrement reste bien formé. Pour cela il suffit de choisir un ensemble de régions du recouvrement de telle sorte que leur union et leurs représentants dans le dual

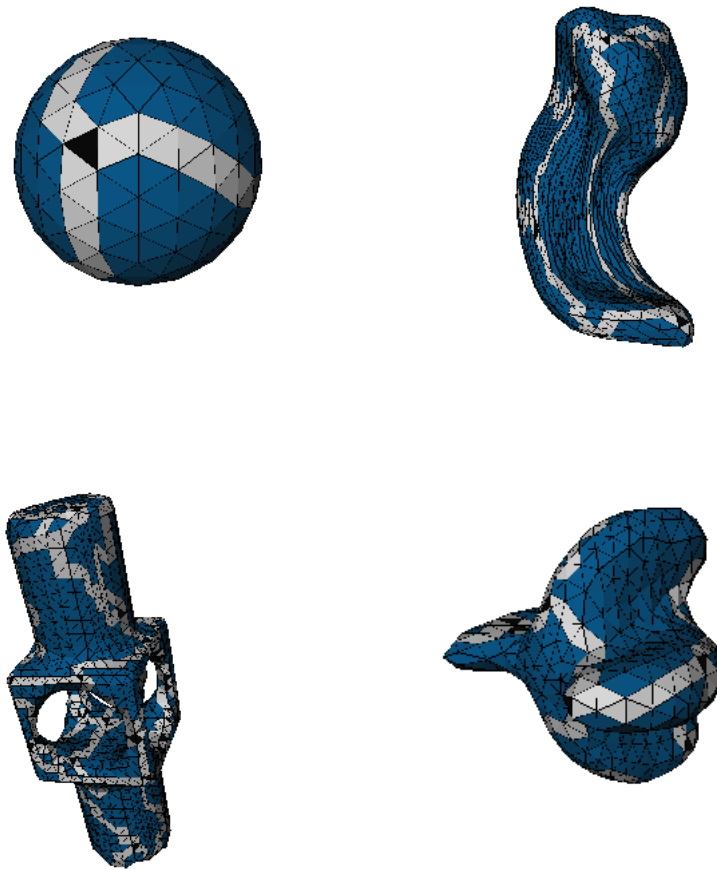


FIG. 4.18 – Exemples de recouvrements bien formés définis sur les quatre maillages choisis pour illustrer notre algorithme.

du recouvrement satisfassent aux hypothèses de la proposition 2.

Nous proposons deux stratégies de choix de régions :

- La fusion en couple : nous choisissons deux régions voisines.
- La fusion en fleur : nous choisissons une région et toutes ses voisines.

La fusion en couple a pour avantage de satisfaire systématiquement à la première hypothèse de la proposition 2. Elle a pour inconvénient de permettre un développement non isotrope des régions comme l'illustre la figure 4.20. Or nous souhaitons que chaque région soit aussi proche que possible d'un disque.

La fusion en fleur a pour avantage de favoriser un développement isotrope des régions. Elle a pour inconvénient de ne pas satisfaire systématiquement à la première hypothèse de la proposition 2 et de rencontrer plus facilement l'échec car elle concerne plus de régions



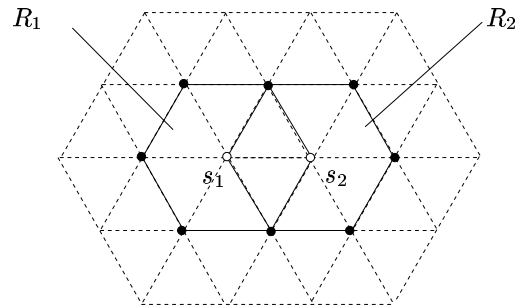


FIG. 4.19 – Régions du premier recouvrement défini sur la surface triangulée  $\mathcal{M}$

qu'une fusion en couple (voir les résultats collectés dans les tableaux de la section 4.5.5).

Nous constatons donc que les deux stratégies se complètent. C'est pourquoi nous commençons par des fusions en fleur afin d'assurer une base isotrope à la forme des régions, puis nous enchaînons sur des fusions en couple afin d'adjoindre des petites régions voisines aux plus grosses. Ces fusions en couple permettent également de débloquer des situations où trop de régions étaient concernées. Enfin, les résultats collectés dans les tableaux de la section 4.5.5 indiquent que le nombre de régions obtenues par cette stratégie est du même ordre que celui obtenu avec une stratégie de fusions en couples uniquement.

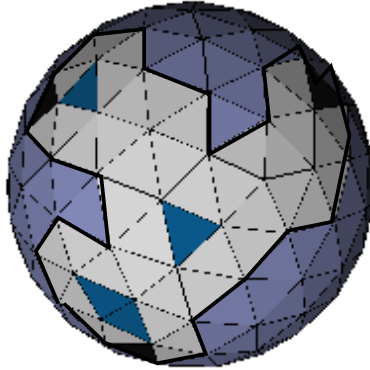


FIG. 4.20 – Une région du recouvrement calculé sur *sphere* avec une erreur calculée selon le critère de la moyenne et un seuil de 10. La stratégie utilisée est de ne procéder qu'à des fusions en couples. Le développement de cette région n'a pas été isotrope.

REMARQUE —

Il est important de remarquer que, pour ces deux stratégies, si les deux hypothèses de la proposition 2 portant sur les éléments du nerf du recouvrement sont vérifiées, alors on est assuré que l'union  $S$  des régions candidates à la fusion est homéomorphe à  $D$ , et ce grâce au lemme 1.3.

#### 4.4.2.2 En pratique

Pour mettre en œuvre ces fusions, nous réfléchissons sur le dual  $(G, F)$  du recouvrement. En pratique, nous codons  $G$  et  $F$  en adjoignant à toute région la liste ordonnée dans le sens trigonométrique de ses voisines (reliées à la région par un pointeur). Chaque région code ainsi naturellement un sommet de  $G$ , et chaque pointeur vers une région voisine code une arête (une arête est donc codée deux fois). Enfin, l'ordre des voisines d'une région code implicitement les faces de  $F$ .

En pratique, nous vérifions la deuxième hypothèse de la proposition 2 dans le cas d'une fusion en fleur comme d'une fusion en couple de la façon suivante. Nous notons  $S$  l'ensemble

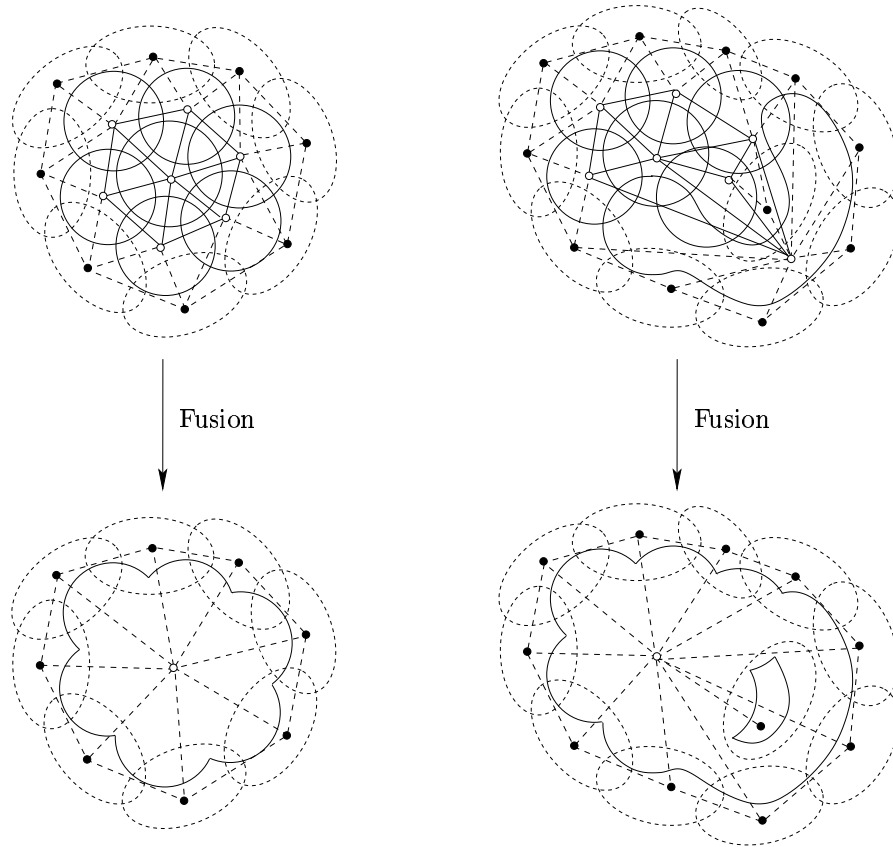


FIG. 4.21 – Fusion de régions en fleur. Les régions candidates sont en trait plein et représentées par des sommets blancs reliés entre eux par des arêtes pleines. A gauche, la fusion est légale. A droite, elle ne l'est pas car les éléments constituant la partie pure de  $S^\#$  ne suivent pas les hypothèses du lemme 1.4.

des régions candidates à la fusion et  $V(S)$  l'ensemble des régions voisines de  $S$  (c'est-à-dire voisine d'une des régions de  $S$  sans en faire partie). Soit  $R$  une région de  $V(S)$ . Nous vérifions alors que l'ensemble des voisines de  $R$  appartenant à  $S$  sont toutes consécutives dans un parcours trigonométrique des voisines de  $R$ .

Nous vérifions la première hypothèse de la proposition 2 dans le cas d'une fusion en fleur de la façon suivante. Il suffit de s'assurer qu'aucun sous-ensemble de  $V(S)$  n'est encadré de régions de  $S$ . Pour cela, nous nous assurons que, lors du parcours trigonométrique des régions de  $V(S)$  (possible grâce à l'ordre des voisines des régions de  $S$ , de la région centrale comme des autres), toute région admet pour voisines la région précédemment rencontrée et au moins une région n'appartenant pas à  $V(S)$ .

## 4.5 Application à la construction d'un atlas

### 4.5.1 Ajout d'un critère géométrique

Nous avons vu dans le chapitre ?? que la première étape de la construction de notre modèle est l'approximation d'une 2-triangulation  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^3$  par une famille de primitives planes  $V_i$ . De plus, chaque primitive doit approcher une région  $R_i$  de  $\mathcal{M}$  de telle sorte que la projection  $v_i$  de  $R_i$  sur  $V_i$  soit une bijection (figure ??, page ??).

Nous proposons de reformuler le problème de la façon suivante : définir un recouvrement  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{M}$  par un ensemble de régions  $R_i$ , chaque région ayant pour propriété géométrique d'être bien approchée par un plan sur lequel elle se projette sans auto-occultation. Comme nous l'avons vu dans la section 4.4 la suite de la construction de notre modèle nécessite que ce recouvrement soit bien formé. Nous appliquons donc l'algorithme de division-fusion décrit dans la section 4.2 en lui ajoutant les deux points suivants :

- Les premières régions à l'issue de l'étape de division doivent être bien approchées par un plan sur lequel elles se projettent sans auto-occultation.
- Lors de l'étape de fusion, nous ordonnons les régions candidates afin d'obtenir le moins de régions possible à la fin de l'algorithme, et nous ajoutons au test de validité d'un choix de régions à fusionner la condition selon laquelle la nouvelle région doit être bien approchée par un plan sur lequel elle se projette sans auto-occultation.

Nous présentons dans cette section un calcul du plan approchant une région d'une 2-triangulation. Puis nous proposons un calcul de l'erreur d'approximation de la région par ce plan qui servira d'une part à évaluer, grâce à un seuil prédéfini, si la région est bien approchée, et d'autre part à ordonner les régions candidates à la fusion. Enfin, nous discuterons du calcul de la projection bijective  $v_i$  de  $R_i$  sur  $V_i$ .

### 4.5.2 Calcul du plan moyen

Bien des méthodes sont envisageables pour calculer le plan approchant une région d'une 2-triangulation. On peut choisir un plan caractéristique de la répartition statistique des points de la région dans  $\mathbb{R}^3$  [Bev69]. Mais pour que ces techniques soient vraiment efficaces, il faut un nombre de points bien supérieur au nombre de sommets constituant généralement une région. On peut alors choisir des points supplémentaires sur chaque face. Mais il nous semble dommage de ne considérer que des points et oublier l'information importante donnée par les faces. C'est pourquoi nous avons préféré une méthode directe classique rappelée dans l'étude de Frey [FB96].

Le plan est déterminé par un point et une direction normale. La direction est calculée comme la somme normalisée des normales des faces, pondérées par les aires de celles-ci. Pondérer les normales par les aires des triangles permet d'être plus indépendant de la triangulation : l'importance de la participation de la normale d'une face est pondérée par celle de la taille de la face vis-à-vis des autres faces.

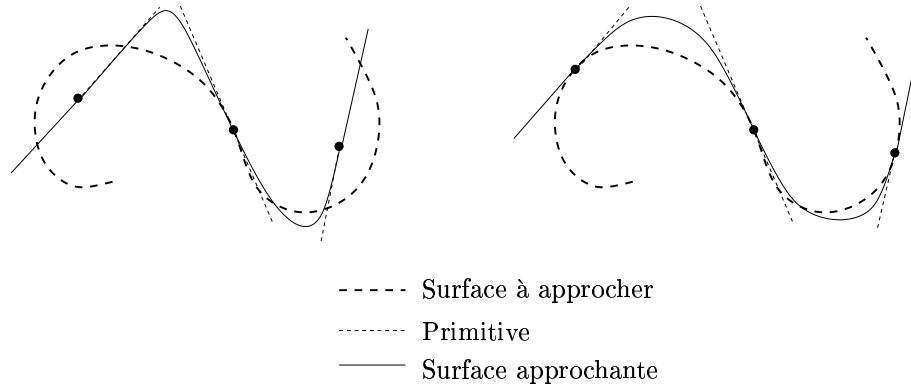


FIG. 4.22 – Pour une approximation par combinaison convexe de primitives, il est préférable de positionner les primitives sur la surface à approcher

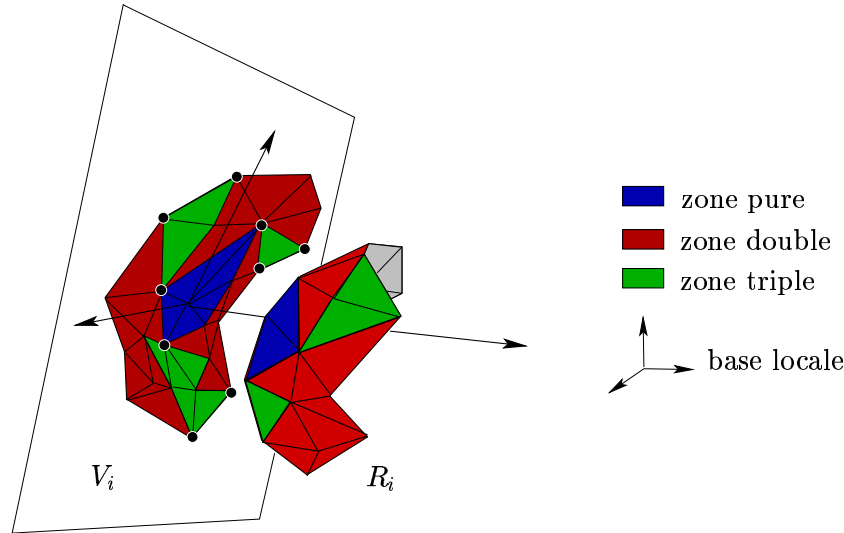
La normale d'une face pondérée par son aire est égale au produit vectoriel de deux de ses arêtes. Elle peut être calculée une fois pour toutes et stockée dans la structure de données d'une face. La question naturelle qui se pose pour le calcul de la normale du plan approchant une région  $R$  est la suivante : peut-on la calculer à partir des normales des plans approchant les régions qui, par fusion, ont constitué  $R$ ? Pas directement. Pour cela, il faut coder la direction normale du plan par un vecteur de norme non égale à un : il doit être calculé comme la somme non normalisée des normales des faces pondérées par les aires de celles-ci. La direction d'une nouvelle région  $R$  est alors égale à la somme des normales aux plans approchant les régions qui, par fusion, ont constitué  $R$ , moins la somme des normales aux faces appartenant aux zones doubles de deux de ces régions, moins deux fois la somme des normales aux faces appartenant aux zones triples de trois de ces régions.

En termes d'approximation, le point à déterminer, par lequel passe le plan approchant une région, devrait être le barycentre des sommets de la région. Mais le procédé de raccord continu des primitives étant basé sur une composition convexe, il nous semble plus judicieux de choisir un point sur la région elle-même (figure 4.22).

Nous avons choisi le sommet de la zone pure de la région dont le projeté sur le plan approchant est le plus proche du barycentre des projetés des sommets de la région (pour évaluer ces projections, seule la direction normale au plan est nécessaire). Ce point est par la suite considéré comme le centre d'un repère du plan approchant. Ce repère est complété par un axe du repère de  $\mathbb{R}^3$  et son orthogonal direct dans le plan (figure 4.23).

### 4.5.3 Calcul de l'erreur

Calculer l'erreur d'approximation d'une région par un plan nous est indispensable d'une part pour évaluer grâce à un seuil prédéfini, si une région est bien approchée par un plan, et d'autre part pour ordonner la liste des régions à fusionner. Dans les exemples illustrant cette section, les points des maillages sont contenus dans la sphère unité et les seuils sont

FIG. 4.23 – Construction d'un repère orthonormé sur  $V_i$ 

pris égaux à 10 (autrement dit un seuil très élevé), 0.1, 0.01 ou 0.00001 (figure 4.24).

**Pour évaluer si une région est bien approchée par un plan** Là encore bien des critères sont envisageables pour évaluer cette erreur d'approximation. Une première idée consiste à observer ce qui est fait en simplification de triangulation [GH97]. Dans le cas d'une simplification, l'erreur calculée est celle de la distance d'un point  $x$  vis-à-vis d'un ensemble de plans  $\{h_i\}$ . Elle peut être calculée soit comme le maximum soit comme la somme des carrés des distances des plans au point. Dans le cas de la somme, la formule peut s'écrire matriciellement

$$E_H(x) = \mathbf{x}^T \cdot \left( \sum_{h_i \in H} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \right) \cdot \mathbf{x}$$

où  $\mathbf{x}^T = (x^T, 1)$  et  $\mathbf{v}_i^T = (v_i^T, 1)$ , avec  $v_i$ , vecteur normal unitaire de  $h_i$ .

Dans notre cas l'erreur calculée est celle de la distance d'un plan  $h$  vis-à-vis d'un ensemble de points  $\{x_i\}$ . La situation est symétrique. Nous proposons donc les deux critères suivants : soit le maximum soit la somme des carrés des distances des points au plan. Dans le cas de la somme, la formule peut s'écrire matriciellement

$$E_X(h) = \mathbf{v}^T \cdot \left( \sum_{x_i \in X} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i^T \right) \cdot \mathbf{v}$$

En général, le nombre de régions définies et la qualité de l'approximation de chaque région par un plan calculé pour un même seuil avec l'un ou l'autre de ces deux critères est comparable lorsque le seuil est assez élevé (figure 4.28). Au contraire lorsque le seuil

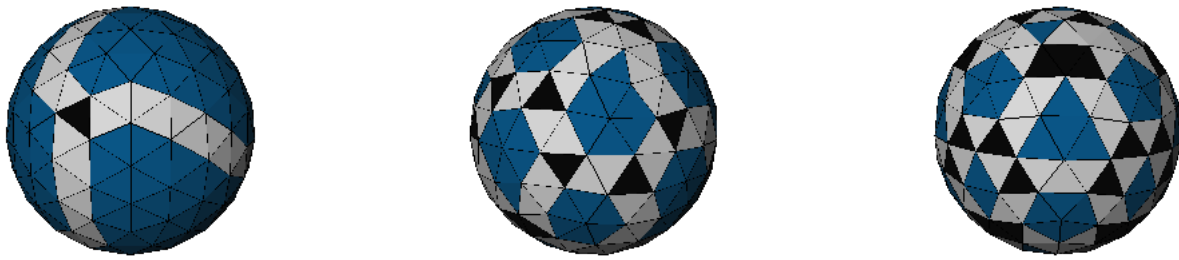


FIG. 4.24 – Régions définies sur *sphere*. L'erreur est calculée comme la moyenne des carrés des distances des points au plan. Le seuil est de 10, 0.1, et enfin 0.01. Le nombre de régions est 6, 18 et 36.

devient plus faible, le nombre de régions créées avec le critère du maximum est bien plus élevé qu'avec le critère de la moyenne (figure 4.28).

On peut alors obtenir de bien meilleures approximations avec le critère de la moyenne qu'avec le critère du maximum, pour un même nombre de régions créées (figure 4.25).

On peut expliquer cette différence en remarquant que l'erreur calculée pour le critère de la moyenne dépend de façon équivalente de chacune des distances qui participent à son calcul. Au contraire, dans le critère du maximum, l'erreur peut être déterminée par une seule des distances qui participent à son calcul. Le seuil peut alors être passé pour un seul sommet mal placé. Et cette différence est encore plus sensible avec des fusions en couple qu'avec des fusions en fleur. En effet, moins il y a de nouvelles distances participant au calcul de l'erreur pour le critère de la moyenne, moins le risque de voir le seuil soudainement dépassé est grand. Ce qui n'est pas le cas avec le critère du maximum puisqu'une distance trop grande suffit pour faire passer l'erreur au-dessus du seuil. De plus, même à nombre de régions égal et à seuil égal, le recouvrement obtenu avec le critère de la moyenne semble être meilleur que celui obtenu avec le critère du maximum comme l'illustre la figure 4.26.

**Pour ordonner la liste des régions à fusionner** Trier les régions selon l'erreur d'approximation commise par le plan approchant ne permet *a priori* que d'encourager l'extension de régions bien approchées par un plan et non de créer la région la mieux approchée par un plan. Mais pour cela, il faudrait tester toutes les combinaisons possibles ce qui n'est guère envisageable. De plus, choisir la meilleure fusion à un pas donné de l'algorithme n'assure pas le meilleur résultat final. Des algorithmes de type "Branch and Bound" permettraient sûrement de rechercher la meilleure séquence de fusions. Nous nous sommes

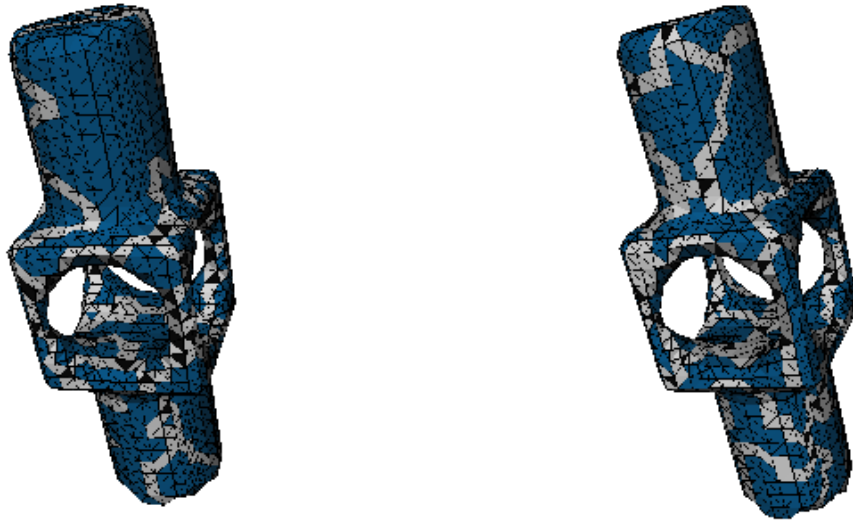


FIG. 4.25 – Régions définies sur *mèche* avec une erreur calculée selon le critère du maximum et un seuil de 0.1, puis avec une erreur calculée selon le critère de la moyenne et un seuil de 0.01. Dans les deux cas le recouvrement est composé de 51 régions.

contentés d'une part de la simple liste triée selon l'erreur calculée ci-dessus, et d'autre part de mettre en début de liste les régions voisines lors d'une fusion en couple (critère que nous nommons *tri local*). Les résultats collectés dans les tableaux de la section 4.5.5 semblent indiquer que la première liste n'a quasiment pas d'influence sur le résultat (que l'on ait utilisé un critère géométrique ou pas, comme lorsque le seuil est posé à 10), contrairement au *tri local* qui, s'il est omis, entraîne de très mauvais résultats.

**Le cas des premières régions** Enfin, les premières régions que nous construisons ne contiennent qu'un sommet dans leur zone pure. L'erreur d'approximation est alors nulle. Le premier tri se fait alors sur un autre critère : le degré de rugosité [FB96]. Le degré de rugosité calculé en un sommet d'une triangulation est une approximation de la courbure de la surface en ce point. Un degré faible correspond donc à une courbure faible de la surface, qui est donc localement proche d'un plan. Notons  $\vec{n}_i$  la normale du plan approchant la région dont la zone pure est réduite au sommet  $S_i$ . C'est également la normale de la triangulation en ce point selon Frey et Borouchaki [FB96]. Notons  $\vec{e}_{ij}$  les vecteurs unitaires de même direction que les arêtes  $S_i S_j$  incidentes à  $S_i$ . Le degré de rugosité d'une triangulation en un sommet est le minimum des produits scalaires  $\langle \vec{n}_i | \vec{e}_{ij} \rangle$  (figure 4.27).





FIG. 4.26 – Régions définies sur *croissants* avec une erreur calculée selon le critère du maximum et un seuil de 0.1, puis avec une erreur calculée selon le critère de la moyenne et un seuil de 0.1. Les deux recouvrements sont constitués de 25 régions mais seules celles du deuxième recouvrement s'adaptent correctement aux parties planes de la surface.

#### 4.5.4 Projection bijective

Enfin, chaque région  $R_i$  doit se projeter sur le plan qui l'approche en un morceau de plan  $V_i$  via la projection  $v_i$ . Cette projection doit être bijective.

Plusieurs méthodes de projections ont été proposées, notamment dans le cadre des dépliements de surface (pour le plaquage de texture ou la définition d'un nouveau maillage sur une surface). On peut citer la carte harmonique proposée par Eck [EDD<sup>+</sup>95] ou encore la solution de retriangulation locale proposée par Lee [LSS<sup>+</sup>98]. Dans tous les cas, ce qui est recherché est la bijectivité, mais surtout la minimisation de la distorsion entre la surface originale et la surface dépliée.

Or dans notre cas, la région est supposée être bien approchée par un plan. La simple projection orthogonale entraîne donc peu de distorsion et est nettement plus rapide que les solutions évoquées ci-dessus. Par contre, elle n'est pas nécessairement bijective. Si elle ne l'est pas, nous refusons la fusion des régions qui conduit à cette région.

Pour savoir si la projection d'une région sur le plan qui l'approche est une bijection, il suffit de tester si aucune face de la région ne se projette en une arête et si toutes les faces projetées ont une même orientation. Cela se vérifie grâce aux normales des faces projetées.

Ce choix a un inconvénient : il existe des premières régions qui ne se projettent pas

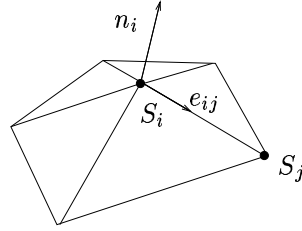


FIG. 4.27 – Calcul du degré de rugosité en un sommet d'un maillage

de façon bijective sur le plan qui les approche (voir [LSS<sup>+</sup>98]). Dans ce cas, il faut déplier artificiellement le parapluie projeté par la méthode proposée par Lee [LSS<sup>+</sup>98] par exemple, ou refuser de traiter des maillages ayant de telles irrégularités. Ce choix a malgré tout un avantage décisif :  $V_i$  est paramétrable par une simple fonction de hauteur constante dans le repère local décrit dans le paragraphe précédent. Cela nous sera fort utile pour la construction de l'atlas.

#### 4.5.5 Résultats

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats de calculs de recouvrements sur les quatre maillages présentés au début de cette section. Les tableaux suivants présentent le nombre de régions constituant les recouvrements en fonction du seuil choisi (10, 0.1, 0.01, ou 0.00001) et de la stratégie employée (des fusions en fleur uniquement, des fusions en fleur suivies de fusions en couple ou des fusions en couple uniquement). Nous avons également séparé les résultats selon que le critère de calcul de l'erreur est le critère du maximum ou de la moyenne, que les régions sont triées ou non, et enfin qu'il a été fait usage du tri local pour les fusions en couple ou non.

Les premiers tableaux concernent les recouvrements calculés sur le maillage *sphere* constitué de 162 sommets et de 320 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 162 régions.

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	21	63	162	162
Fleur et Couple	5	27	64	122
Couple	5	24	64	122

Critère du maximum et liste triée

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	19	50	162	162
Fleur et Couple	6	18	36	73
Couple	5	18	36	73

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.1 – Recouvrements de *sphere* (liste non triée)

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	23	63	162	162
Fleur et Couple	6	25	64	122
Couple	6	25	64	122
Sans Tri Local	37	79	114	162

Critère du maximum et liste non triée

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	23	50	162	162
Fleur et Couple	6	17	34	73
Couple	6	19	34	73
Sans Tri Local	37	62	82	133

Critère de la moyenne et liste non triée

TAB. 4.2 – Recouvrements de *sphere* (liste non triée)

Les tableaux suivants concernent les recouvrements calculés sur le maillage *hippocampus* constitué de 1002 sommets et de 2000 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 1002 régions. Les différences étant mineures, nous ne présentons pas les résultats concernant le calcul de recouvrements sans l'utilisation d'une liste triée.

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	156	182	593	1002
Fleur et Couple	10	27	174	999
Couple	9	31	171	999
Sans Tri Local	145	203	548	973

Critère du maximum et liste triée

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	121	146	225	973
Fleur et Couple	10	24	53	389
Couple	10	27	62	389

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.3 – Recouvrements de *hippocampus*

Les tableaux suivants concernent les recouvrements calculés sur le maillage *mèche* constitué de 1572 sommets et de 3152 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 1572 régions. Parce qu'ils ne présentent pas de spécificité, nous ne présentons pas les résultats concernant le calcul de recouvrements avec un seuil de 0.00001.

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	366	365	615
Fleur et Couple	53	51	153
Couple	40	48	71

Critère du maximum et liste triée

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	306	313	431
Fleur et Couple	39	51	63

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.4 – Recouvrements de *mèche*

Les derniers tableaux concernent les recouvrements calculés sur le maillage *croissants* constitué de 542 sommets et de 1080 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 542 régions.

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	109	113	516
Fleur et Couple	14	25	159
Couple	17	33	162

Critère du maximum et liste triée

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	99	139	191
Fleur et Couple	13	25	50
Couple	12	30	55

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.5 – Recouvrements de *croissants*

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme de construction d'un recouvrement bien formé sur un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  qui est une variété de dimension 2 connexe et compacte. Pour ce faire, nous avons démontré que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Nous avons également établi des conditions suffisantes sur son nerf pour que le recouvrement reste bien formé après la fusion d'une partie de ses régions. Cela nous a permis de proposer un algorithme de division-fusion pour construire un tel recouvrement, et finalement de l'appliquer à l'approximation de  $\mathcal{M}$  par une famille de primitives planes. Ces résultats constituent la première étape de la construction de notre modèle de surface.

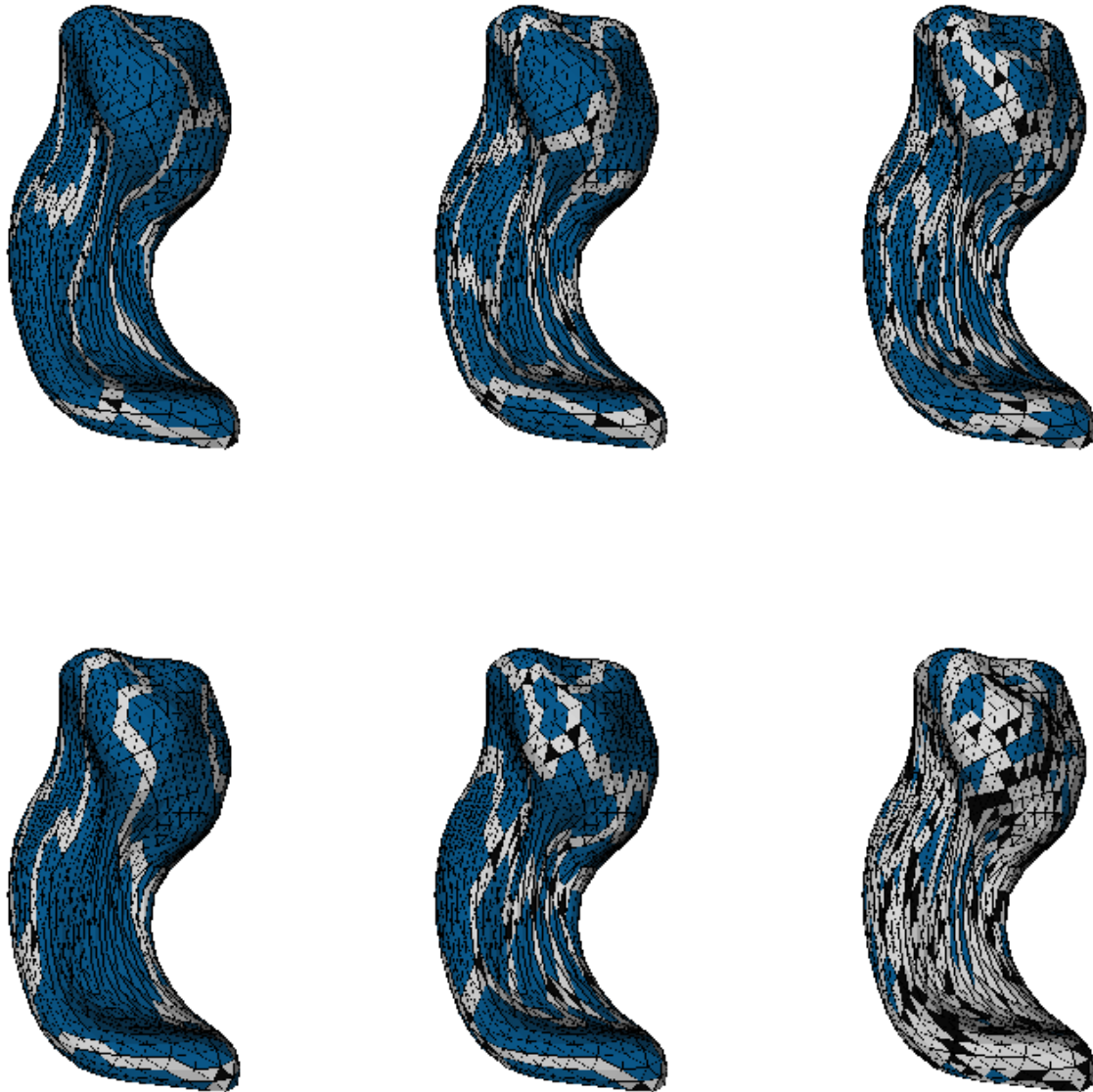


FIG. 4.28 – Régions définies sur *hippocampus* avec un seuil de 10, 0.1, et 0.01. Sur la première ligne, l'erreur est calculée comme la moyenne des carrés des distances des points au plan. Sur la deuxième ligne, l'erreur est calculée comme le maximum des carrés des distances des points au plan.



# Annexe A

## Démonstrations pour la définition d'un recouvrement

### A.1 Démonstration pour la correspondance entre les zones d'un recouvrement bien formé avant et après fusion

Nous considérons un recouvrement bien formé  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  défini sur un espace topologique  $\mathcal{M}$ .

Soit  $J \subset I$  l'ensemble des indices des régions de  $\mathcal{R}$  que l'on fusionne.

On note  $S = \bigcup_{j \in J} R_j$  et  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J} \cup S$  le recouvrement après fusion.

Nous établissons la constitution de la zone pure, de la zone double et de la zone triple de  $S$  dans  $\mathcal{S}$  à partir des zones pures, doubles et triples des régions  $\{R_j\}_{j \in J}$  dans  $\mathcal{R}$ .

#### Proposition 3

$$\begin{aligned} zp(S) &= \bigcup_{i \in J} zp(R_i) \cup \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \neq \emptyset} zd(R_i, R_j) \cup \bigcup_{(i,j,k) \in J^3: R_i \cap R_j \cap R_k \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_k) \\ zd(S, R_n) &= \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_n \neq \emptyset} zd(R_i, R_n) \cup \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \cap R_n \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_n) \\ zt(S, R_n, R_m) &= \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_n \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_n, R_m) \end{aligned}$$

**Démonstration 3** Utilisons un raisonnement par récurrence.

$J$  ne contient que deux indices.

$$zp(R_1 \cup R_2) = \{x \in R_1 \cup R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{x \in R_1 \setminus R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in R_1 \cap R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in R_2 \setminus R_1 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \\
&= \{x \in R_1 : \forall i \in I \setminus \{1\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in R_1 \cap R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in R_2 : \forall i \in I \setminus \{2\}, x \notin R_i\} \\
&= zp(R_1) \cup zd(R_1, R_2) \cup zp(R_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zd(S, R_n) &= \{x \in (R_1 \cup R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \\
&= \{x \in (R_1 \setminus R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in (R_1 \cap R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in (R_2 \setminus R_1) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \\
&= \{x \in R_1 \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in (R_1 \cap R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
&\quad \{x \in R_2 \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{2, n\}, x \notin R_i\} \\
&= zd(R_1, R_n) \cup zt(R_1, R_2, R_n) \cup zd(R_2, R_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zt(S, R_n, R_m) &= \{x \in (R_1 \cup R_2) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \\
&= \{x \in (R_1 \setminus R_2) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \cup \\
&\quad \{x \in (R_1 \cap R_2) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \cup \\
&\quad \{x \in (R_2 \setminus R_1) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \\
&= \{x \in R_1 \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, n, m\}, x \notin R_j\} \cup \\
&\quad \emptyset \\
&\quad \{x \in R_2 \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{2, n, m\}, x \notin R_j\} \\
&= zt(R_1, R_n, R_m) \cup zt(R_2, R_n, R_m)
\end{aligned}$$

Supposons les égalités établies si  $J$  contient  $n - 1$  indices.

Supposons que  $J$  contienne  $n$  indices dont  $n$ . On note  $J = K \cup \{n\}$ . Alors, d'après le résultat démontré au rang 2,

$$\begin{aligned}
zp\left(\bigcup_{i \in K} R_i \cup R_n\right) &= zp\left(\bigcup_{i \in K} R_i\right) \cup zd\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_n\right) \cup zp(R_n) \\
&\stackrel{\text{HR}}{=} \bigcup_{i \in K} zp(R_i) \cup \bigcup_{(i,j) \in K^2: R_i \cap R_j \neq \emptyset} zd(R_i, R_j) \cup \\
&\quad \bigcup_{(i,j,k) \in K^3: R_i \cap R_j \cap R_k \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_k) \cup \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_n \neq \emptyset} zd(R_i, R_n) \cup
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \bigcup_{(i,j) \in K^2: R_i \cap R_j \cap R_n \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_n) \cup zp(R_n) \\
= & \bigcup_{i \in J} zp(R_i) \cup \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \neq \emptyset} zd(R_i, R_j) \cup \\
& \bigcup_{(i,j,k) \in J^3: R_i \cap R_j \cap R_k \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zd\left(\bigcup_{i \in K} R_i \cup R_n, R_m\right) & \stackrel{\text{rg}^2}{=} zd\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_m\right) \cup zd(R_n, R_m) \cup zt\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_n, R_m\right) \\
& \stackrel{\text{HR}}{=} \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_m \neq \emptyset} zd(R_i, R_m) \cup \\
& \quad \bigcup_{(i,j) \in K^2: R_i \cap R_j \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_m) \cup \\
& \quad \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_n \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_n, R_m) \\
= & \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_m \neq \emptyset} zd(R_i, R_m) \cup \\
& \quad \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zt\left(\bigcup_{i \in K} R_i \cup R_n, R_m, R_p\right) & \stackrel{\text{rg}^2}{=} zt\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_m, R_p\right) / \text{cup} zt(R_n, R_m, R_p) \\
& \stackrel{\text{HR}}{=} \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_m \cap R_p \neq \emptyset} zt(R_i, R_m, R_p) \cup zt(R_n, R_m, R_p) \\
= & \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_m \cap R_p \neq \emptyset} zt(R_i, R_m, R_p)
\end{aligned}$$

■

## A.2 Démonstration du lemme 1.2.1

**Lemme -4.2.1** *Soient deux régions voisines  $R_1$  et  $R_2$  d'un recouvrement, homéomorphes à  $D$  et ayant une intersection conforme. Les frontières de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_1 \cap R_2$  sont toutes trois décomposables en quatre parties connexes non vides, deux ouvertes et deux fermées (alternativement lors d'un parcours de la frontière) telles que les deux parties fermées appartiennent aux trois frontières.*

**Démonstration 1.2.1** Par hypothèse, les régions  $R_1$  et  $R_2$  sont homéomorphes à  $D$ . Soit  $f : D \rightarrow R_1$  une fonction continue réalisant cet homéomorphisme sur  $R_1$ . Par prolongement par continuité, on peut définir la fonction continue  $g : \overline{D} \rightarrow \overline{R_1}$ . En particulier  $g$  paramétrise continuellement  $\partial R_1$  sur le cercle unité  $\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ . Cette paramétrisation permet entre autres de définir le parcours de  $\partial R_1$  à partir de celui de  $\mathcal{C}$  (parcours trigonométrique). Il permet également de définir les parties connexes de  $\partial R_1$  comme les images par  $g$  de celles de  $\mathcal{C}$ . Il est important de remarquer que  $g$  n'est pas nécessairement bijectif.

- Nous commençons par démontrer le résultat sur  $\partial(R_1 \cap R_2)$ .

L'espace topologique  $\mathcal{M}$  peut se décomposer selon l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{M} = \overline{R_2} \cup \overline{R_2}^c$$

où  $R^c = \{x \in \mathcal{M} : x \notin R\}$ . On peut donc écrire,  $R_2$  étant un ouvert,

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1 \cap \mathcal{M} \\ R_1 &= (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (R_1 \cap \overline{R_2}^c) \\ R_1 &\stackrel{4.1}{=} (R_1 \cap (R_2 \cup \partial R_2)) \cup (R_1 \cap \overline{R_2}^c) \\ \underbrace{R_1}_{\simeq D} &= \underbrace{(R_1 \cap R_2)}_{\simeq D} \cup (R_1 \cap \partial R_2) \cup \underbrace{(R_1 \setminus \overline{R_2})}_{\simeq D} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

car  $R_1$  et  $R_2$  ont une intersection conforme (remarquons que les unions sont disjointes).

De plus,  $R_1 \cap \partial R_2$  est continuellement paramétrable sur une ou plusieurs composantes connexes ouvertes de  $\mathcal{C}$  en tant qu'intersection de  $R_1$ , homéomorphe à  $D$ , avec  $\partial R_2$ , homéomorphe à  $\mathcal{C}$  (la propriété ouverte est entendue dans la topologie de  $\mathcal{C}$  : ce n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ). Considérons une de ces composantes connexes. Elle peut être de deux types : elle est l'image par une fonction continue soit de  $\mathcal{C}$  soit d'un arc connexe de  $\mathcal{C}$ . Dans le premier cas, cela impliquerait  $R_1 \cap R_2 \subset R_1$  d'où  $R_1 \setminus \overline{R_2} \not\cong D$ . Dans le deuxième cas, on note cette composante  $]A; B[$  où  $A$  et  $B$  sont les images par la fonction continue des deux extrémités de l'arc connexe de  $\mathcal{C}$  considéré. Nécessairement,  $A \in \partial R_1$  et  $B \in \partial R_1$  et  $]A; B[ \subset R_1$ , ce qui implique que  $]A; B[$  partage  $R_1$  en deux sous-domaines homéomorphes à  $D$ . Si donc  $R_1 \cap \partial R_2$  était composé d'une seconde composante connexe, ces deux composantes découperaient  $R_1$  en plus de deux sous-domaines homéomorphes à  $D$  (figure A.2). Ce qui contredirait le découpage énoncé par l'égalité A.1.

$R_1 \cap \partial R_2$  est donc continuellement paramétrable sur une unique composante connexe de  $\mathcal{C}$ .

De même,  $R_2 \cap \partial R_1$  est continuellement paramétrable sur une unique composante connexe

de  $\mathcal{C}$ .

Démontrons à présent

$$R_1 \cap \partial R_2 \subset \partial(R_1 \cap R_2) \quad (\text{A.2})$$

$$R_2 \cap \partial R_1 \subset \partial(R_2 \cap R_1) \quad (\text{A.3})$$

Soit  $x \in R_1 \cap \partial R_2 \subset R_1 \cap \overline{R_2} \subset \overline{R_2}$ .

$x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_2$ .

Aussi,  $x \in R_1$  qui est un ouvert, donc à partir d'un certain rang,  $x_i \in R_1$ .

Donc  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1 \cap R_2$ , d'où  $x \in \overline{R_1 \cap R_2}$ .

Or  $x \in R_1 \cap \partial R_2 \subset \partial R_2$  donc  $x \notin R_2$  donc  $x \notin R_1 \cap R_2$ .

Par conséquent,  $x \in \partial(R_1 \cap R_2)$ .

La deuxième inclusion se démontre de la même manière.

D'autre part,

$$\begin{aligned} (R_1 \cap \partial R_2) \cap (R_2 \cap \partial R_1) &= (R_1 \cap \partial R_1) \cap (R_2 \cap \partial R_2) \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \emptyset \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ainsi,  $\partial(R_1 \cap R_2)$  est continuellement paramétrable sur  $\mathcal{C}$ , admet d'après les équations A.2 et A.3 deux composantes connexes ouvertes qui, d'après l'équation A.4 sont sans intersection.  $\partial(R_1 \cap R_2)$  se décompose donc en quatre parties connexes, deux ouvertes et deux fermées disposées en alternance. On note les deux composantes fermées  $a$  et  $b$ .

$$\partial(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap \partial R_2) \cup (R_2 \cap \partial R_1) \cup a \cup b \quad (\text{A.5})$$

• Démontrons alors le résultat pour  $\partial R_1$ . La démonstration pour  $\partial R_2$  est identique. Nous commençons par démontrer

$$(R_2 \cap \partial R_1) \cup a \cup b = \partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_1 \quad (\text{A.6})$$

$$(R_1 \cap \partial R_2) \cup a \cup b = \partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_2 \quad (\text{A.7})$$

D'après l'équation A.5 il s'agit de montrer que pour tout  $x \in \partial(R_1 \cap R_2)$ ,

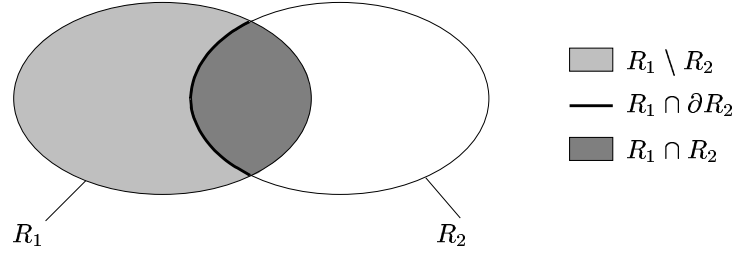
$$x \notin R_1 \Leftrightarrow x \notin R_1 \cap \partial R_2$$

autrement dit,

$$x \in R_1 \Leftrightarrow x \in R_1 \cap \partial R_2$$

Soit  $x \in \partial(R_1 \cap R_2)$  :  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1 \cap R_2$  et  $x \notin R_1 \cap R_2$ .

Si  $x \in R_1 \cap \partial R_2$ ,  $x \in R_1$ .

FIG. A.1 – Décomposition de  $R_1$ 

Réciproquement, si  $x \in R_1$ , comme  $x \notin R_1 \cap R_2$ ,  $x \notin R_2$ .

Aussi,  $R_1 \cap R_2 \subset R_2$  donc  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_2$ .

Ainsi,  $x \in \partial R_2$ , d'où  $x \in R_1 \cap \partial R_2$ .

Démontrons à présent

$$a \cup b \subset \partial R_1 \tag{A.8}$$

D'après les équations A.6 et A.7

$$\begin{aligned} a \cup b &= (\partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_1) \cap (\partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_2) \\ &= (\partial(R_1 \cap R_2) \cap R_1^c) \cap (\partial(R_1 \cap R_2) \cap R_2^c) \\ &= \partial(R_1 \cap R_2) \cap (R_1^c \cap R_2^c) \\ &= \partial(R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \cup R_2)^c \\ &= \partial(R_1 \cap R_2) \setminus (R_1 \cup R_2) \end{aligned}$$

Soit  $x \in a \cup b$ , alors  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1 \cap R_2$ ,  $x \notin R_1 \cap R_2$  mais aussi  $x \notin R_1 \cup R_2$ .

$x$  est donc la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1$  et  $x \notin R_1$ , donc  $x \in \partial R_1$ .

Par conséquent,  $\partial R_1$  admet deux composantes fermées  $a$  et  $b$  sans intersection. Elle se décompose donc en quatre composantes, deux fermées et deux ouvertes disposées alternativement. ■

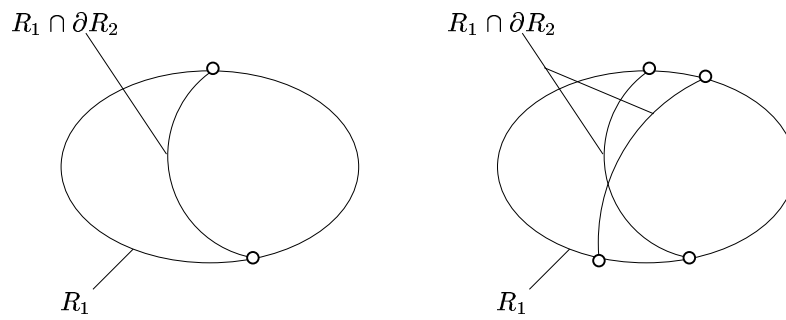


FIG. A.2 – A gauche,  $R_1 \cap \partial R_2$  est constitué d'une composante connexe. A droite,  $R_1 \cap \partial R_2$  est composée de deux composantes connexes.



# Bibliographie

- [Ale56] P. S. Alexandrov. *Combinatorial Topology*. Dover, New-York, 1956.
- [Bev69] P. R. Bevington. *Data Reduction and Error Analysis*. New York : Mc Graw-Hill, 1969.
- [BJ88] P. J. Besl and R. C. Jain. Segmentation through variable-order surface fitting. *IEEE Trans. PAMI*, 10(2), 1988.
- [BM97] I. Bricault and O. Monga. From volume medical images to quadratic surface patches. *CVGIP :Image Understanding*, 67(1) :24–38, 1997.
- [CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10, 1978.
- [Cha00] R. Chaine. *Segmentation d'ensembles non organisés de points 3-D d'une surface : propagation anisotrope d'étiquettes basée sur les graphes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON 1, 2000.
- [CP95] J. P. Cocquerez and S. Philipp. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.
- [CP00a] J. Cotrina and N. Pla. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :643–671, 2000.
- [CP00b] J. Cotrina and N. Pla. Modelling surfaces from planar irregular meshes. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :1–15, 2000.
- [EDD<sup>+</sup>95] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuezle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 173–182, 1995.
- [Ede] H. Edelsbrüner. *Geometry and Topology of Mesh Generation*. Cambridge University Press. in press.
- [FB96] P. J. Frey and H. Borouchaky. Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces. Technical report, INRIA, 1996. rapport n<sup>o</sup> 2951.
- [GH95] C. M. Grimm and J. F. Hughes. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 359–367, 1995.
- [GH97] M. Garland and P. S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'97*, 1997.

- [GH98] M. Garland and P. S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. *Proceedings of IEEE Vis'98*, 1998. <http://www.cs.cmu.edu/garland>.
- [LSS<sup>+</sup>98] A. W. F. Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, and D. Dobkin. Maps : Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'98*, pages 95–104, 1998.
- [MR91] A. Montanvert P. Meer and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13 :307–316, April 1991.
- [MYV93] J. Maillot, H. Yahia, and A. Verroust. Interactive texture mapping. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'93*, pages 27–35, 1993.
- [Ped95] H. K. Pedersen. Decorating implicit surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 291–300, 1995.
- [PFH00] E. Praun, A. Finkelstein, and H. Hoppe. Lapped textures. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'00*, 2000.